СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Н. А. Симонов *

УДК 519.245

Введение

Связь между параболическими уравнениями и диффузионными случайными процессами открыта, как известно, ещё в начале века [1]. Полученные вероятностные представления оказались, однако, мало пригодными для построения эффективных численных алгоритмов в силу того, что они требуют довольно громоздких построений, необходимых для численной аппроксимации континуальных интегралов [2]. Лишь в последнее время получены результаты, позволяющие достаточно эффективно решать параболические задачи на основе моделирования диффузионных процессов, как решений стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СДУ) (см., например,[3]). Исторически же, начиная с работы [4], наибольшее внимание уделялось построению методов, основанных на разнообразных соотношениях о среднем [5], [6], [7]. Что касается классических краевых задач для уравнения теплопроводности, то применение теории потенциала позволило построить представление их решений в виде функционалов от траекторий марковской цепи случайного блуждания по границе [8]. Отметим, кроме того, случайные оценки решений уравнений более общего вида, построенные для краевой задачи третьего рода в полупространстве и задачи Коши и основанные на моделировании траекторий марковской цепи внутри области, а также алгоритмы статистического моделирования для решения задач о диффузии примеси, которые тесно смыкаются с методами решения стохастических дифференциальных уравнений [5]. Похожие идеи использования дискретной аппроксимации и перехода от уравнения в частных производных к многомерному СДУ лежат в основании метода случайных вихрей для уравнений Навье-Стокса [9].

Что касается методов построения вероятностных представлений, предлагаемых в данной работе, то они основаны на логическом развитии идей [5], [8], [19] и позволяют получить несмещённые оценки решения параболического уравнения и его производных в виде функционалов от траектории ветвящейся марковской цепи.

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, Проект 94-01-00209

1. Интегральная формулировка задачи

Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^{m} u_i(x,t) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(x,t)w + f(x,t),$$

или

$$\begin{gathered} w_t = \nu \Delta w - (u \cdot \nabla) w + cw + f, \\ (x,t) \in H \equiv \mathbb{R}^m \times (0,T], \end{gathered} \tag{1}$$

где $u(x,t) = (u_1, u_2, ..., u_m)$ – ограниченное поле:

$$|u| \le C_u,$$

$\nu > 0$ – некоторый постоянный коэффициент, а $c(x,t), f(x,t)$ – ограниченные функции.

Хорошо известно [10], что при достаточно гладких ограниченных u_i, c, f, и w_0 решение задачи Коши

$$w(x,0) = w_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

для уравнения (1) существует и единственно в пространстве $C^{2,1}(H)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и непрерывно дифференцируемых по t ограниченных функций. При этом, если известно $Z^{(1)}(x,t;x',t')$ – фундаментальное решение уравнения (1), то $w(x,t)$ представляется в виде суммы потенциалов, ядра которых есть $Z^{(1)}$. Заметим, однако, что точное выражение для этой функции можно выписать только в весьма ограниченном классе уравнений параболического типа, например, в случае постоянных коэффициентов u_i, c, f. В общем же случае $Z^{(1)}$ можно построить (см. [10]) в виде суммы параметрикса

$$Z(x-x', t-t') = \left(4\pi\nu(t-t')\right)^{-m/2} \exp\left(-\frac{|x-x'|^2}{4\nu(t-t')}\right), \quad t-t' > 0$$

то есть фундаментального решения уравнения теплопроводности

$$w_t = \nu \Delta w,$$

и объёмного потенциала с ядром Z и неизвестной плотностью, которая, в свою очередь, ищется в виде суммы ряда Неймана для некоторого интегрального уравнения. Именно это представление было использовано в [5] при построении монте-карловской оценки для решения задачи Коши.

В данной работе, не прибегая к посредству $Z^{(1)}$, будем напрямую искать решение уравнения (1) в виде суммы ряда Неймана для интегрального оператора с ядром, построенным на основе параметрикса Z. Рассмотрим следующее представление

$$
\begin{aligned}
w(x,t) = \int\limits_0^t dt' \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx' Z(x-x', t-t') \\
\times \left[-(u\cdot\nabla)w(x',t') + c(x',t')w(x',t') + f(x't')\right] \\
+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx' Z(x-x',t) w_0(x').
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Очевидно, что решение этого интегро-дифференциального уравнения в пространстве $C^{2,1}(H)$ существует и совпадает в силу свойств потенциалов [11] с решением задачи Коши. Продифференцировав (3) по пространственным переменным, получим систему уравнений, которой удовлетворяют компоненты градиента функции $w(x,t)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x_i}(x,t) = \int\limits_0^t dt' \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx' \frac{\partial Z}{\partial x_i}(x-x', t-t') \\
\times \left[-(u\cdot\nabla)w(x',t') + c(x',t')w(x',t') + f(x't')\right] \\
+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx' \frac{\partial Z}{\partial x_i}(x-x',t) w_0(x') \quad , i = 1,\ldots,m.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Перепишем теперь (3), (4) в виде единой системы интегральных уравнений и покажем, что её решение даёт нам решение исходной задачи Коши. Итак, пусть

$$
W = \mathcal{K}W + F,
\tag{5}
$$

где $W = (W_0, W_1, \ldots, W_m)^T$, $\mathcal{K}$ – матрично-интегральный оператор с матрицей ядер $K = \{k_{ij}\}_{i,j=0}^m$. Здесь

$$
\begin{gathered}
k_{00}(x,t;x't') = Z(x-x',t-t')c(x',t'), \quad k_{0j}(x,t;x't') = -Z(x-x',t-t')u_j(x',t'), \\
k_{i0}(x,t;x't') = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(x-x',t-t')c(x',t'), \ k_{ij}(x,t;x't') = -\frac{\partial Z}{\partial x_i}(x-x',t-t')u_j(x',t'), \\
i,j = 1,\ldots,m,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
F_0(x,t) = \int\limits_0^t dt' \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx' Z(x-x',t-t') f(x't') \\
+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx' Z(x-x',t) w_0(x'),
\end{aligned}
$$

$$F_i(x,t) = \int\limits_0^t dt' \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx' \frac{\partial Z}{\partial x_i}(x-x', t-t') f(x't')$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx' \frac{\partial Z}{\partial x_i}(x-x', t) w_0(x'), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Покажем, что при определённых условиях решение системы (5) единственно и лежит в $C^{2,1}(H)$. Отсюда будет следовать, что W_0 есть решение задачи Коши, а W_i – его производные по пространственным переменным.

Для дальнейших выкладок будет удобно ввести (по аналогии с [8]) класс $K_{\alpha,\beta}$ слабо полярных ядер, определённых при $0 < t' < t < \infty$.

Definition 1. Ядро $k(x,t;x't')$ принадлежит классу $K_{\alpha,\beta}$, если для любых $x, x' \in \mathbb{R}^m$ и $0 < t' < t < \infty$ выполняется неравенство

$$|k(x,t;x't')| \leq C_0(t-t')^{-(\frac{m}{2}+\alpha)}|x-x'|^\beta \exp\left(-\gamma\frac{|x-x'|^2}{t-t'}\right), \tag{7}$$

где C_0, γ – некоторые положительные константы.

□

Ядро класса $K_{\alpha,\beta}$ слабо полярно (то есть особенность ядра интегрируема), если $\delta = (\beta - 2\alpha + 2)/2 > 0$ и $m + \beta > 0$.

Lemma 1.
1)Ряд Неймана для интегрального уравнения со слабо полярным ядром (7) *и правой частью, равномерно по x удовлетворяющей при всех t неравенству*

$$|f(x,t)| \leq C_f t^a, \;\; a > -1, \tag{8}$$

сходится в $L_\infty(H)$.
2)Ряд Неймана для системы интегральных уравнений, матрица которой состоит из слабо полярных ядер, а компоненты F_i свободного члена удовлетворяют неравенствам вида (8) *(возможно для различных $C_{f,i}, a_i$), сходится в пространстве вектор-функций с компонентами из $L_\infty(H)$.*

Доказательство. Первая часть леммы представляет собой хорошо известный факт (см., например, [10]). Для его доказательства достаточно заметить, что при выполнении **(8)**

$$|\boldsymbol{Kf(x,t)}| \leq \boldsymbol{C_f\ A\ B(1+a,\delta)\ t^{a+\delta}}, \tag{9}$$

и применить последовательно это неравенство при оценивании степеней интегрального оператора $\boldsymbol{K}$. Здесь обозначено $\boldsymbol{A = 0.5 \cdot C_0\sigma_m\gamma^{-\frac{m+\beta}{2}}\Gamma(\frac{m+\beta}{2})}$, $\boldsymbol{\sigma_m}$ – полный телесный угол. При этом бета-функция $\boldsymbol{B(1+a,\delta)}$ и гамма-функция $\boldsymbol{\Gamma(\frac{m+\beta}{2})}$ выражаются конечными интегралами в силу условий слабой полярности.

В результате получается следующая оценка

$$|K^n f(x,t)| \le C_f\,\Gamma(a+1)\,t^a\,\frac{(A\,\Gamma(\delta)\,t^\delta)^n}{\Gamma(1+a+n\delta)},$$

из которой, в силу асимптотических свойств гамма-функции, и следует сходимость ряда.

В векторном случае

$$|(\mathcal{K}F)_i(x,t)| \le \sum_{j=0}^{m} C_{f,j} A_j B(1+a_j,\delta_j)\,t^{a_j+\delta_j}, \quad i=1,\ldots,m, \tag{10}$$

откуда по индукции следует

$$\begin{aligned}
&|(\mathcal{K}^n F)_i(x,t)| \\
&\quad \le \sum_{j1=0}^{m}\cdots\sum_{jn=0}^{m} C_{f,j1}A_{j1}\cdots A_{jn}B(1+a_{j1},\delta_{j1}) \\
&\qquad \times B(1+a_{j1}+\delta_{j1},\delta_{j2})\cdots B(1+a_{j1}+\delta_{j1}+\ldots+\delta_{j,n-1},\delta_{jn})\,t^{a_{j1}+\delta_{j1}+\ldots+\delta_{jn}} \\
&\quad = \sum_{j1=0}^{m}\cdots\sum_{jn=0}^{m} C_{f,j1}A_{j1}\cdots A_{jn}\frac{\Gamma(1+a_{j1})\Gamma(\delta_{j1})\cdots\Gamma(\delta_{jn})}{\Gamma(1+a_{j1}+\delta_{j1}+\ldots+\delta_{jn})}\,t^{a_{j1}+\delta_{j1}+\ldots+\delta_{jn}} \\
&\quad \le (m+1)C_1\frac{(C_2)^n}{\Gamma(1+a+n\delta)} \equiv v_n, \quad i=1,\ldots,m,
\end{aligned} \tag{11}$$

где $C_1 = \max_j C_{f,j}\Gamma(1+a_j)\,t^{a_j}$, $C_2 = \max_j A_j\Gamma(\delta_j)\,t^{\delta_j}$, $a = \min_j a_j$, $\delta = \min_j \delta_j$.

Ряд $\sum_0^\infty v_n$ сходится в силу асимптотических свойств гамма-функции, что влечёт за собой равномерную сходимость ряда Неймана для матрично-интегрального уравнения. □

Theorem 1. *Пусть функции $u_j(x,t), c(x,t), f(x,t)$*
a) непрерывны в H ;
b) ограничены ;
c) непрерывны по Гёльдеру относительно x равномерно по t,
а функция $w_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^m$.

Тогда
1) ряд Неймана для уравнения (5) сходится к вектор-функции W с компонентами в $L_\infty(H)$;
2) $w(x,t) = W_0(x,t)$, является решением задачи Коши (2) для уравнения (1);
3) $W_i(x,t) = \partial w/\partial x_i$, то есть i-тая компонента суммы ряда Неймана совпадает с соответствующей производной нулевой компоненты.

Доказательство. Заметим вначале, что условия теоремы обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши **(1)**, **(2)**. Докажем теперь сходимость ряда Неймана. Для доказательства этого достаточно установить, что компоненты ядра матрично-интегрального оператора $\mathcal{K}$ слабо полярны. Действительно, из ограниченности функций c, u_j следует, что ядра $k_{0j} \in K_{0,0},\ j = 0,1,\ldots,m$, то есть слабо полярны с параметром $\delta_1 = 1$, а так как

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i}(x-x', t-t') = -\frac{x_i - x_i'}{2\nu(t-t')} Z(x-x', t-t'), \tag{12}$$

то $k_{ij} \in K_{1,1},\ i = 1,\ldots,m,\ j = 0,1,\ldots,m$ и, следовательно, слабо полярны с параметром $\delta_2 = 0.5$.

Обратимся теперь к свободному члену уравнения (5). Пользуясь ограниченностью функций f и w_0, непосредственно убеждаемся, что равномерно по x

$$|F_0(x,t)| \le \|w_0\| + t\|f\|, \tag{13}$$

$$|F_i(x,t)| \le t^{-1/2}\,\nu^{-1/2}\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\|w_0\| + 2t\|f\|\right), \tag{14}$$

где нормы в правой части рассматриваются в соответствующих пространствах непрерывных функций.

Таким образом, все условия леммы 1 выполнены, и, следовательно, ряд Неймана для интегрального уравнения (5) сходится.

Для доказательства гладкости суммы этого ряда рассмотрим свободный член уравнения. Заметим, во-первых, что потенциалы, входящие в F и зависящие от w_0 , есть при $t > 0$ бесконечно дифференцируемые функции [13]. Что касается потенциалов, зависящих от f, то в силу условий гладкости, которым удовлетворяет эта функция, $\int\limits_0^t dt' \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx' Z(x - x', t-t') f(x't')$ принадлежит $C^{2,1}(H)$, а $F_i,\ i = 1,\ldots,m$ непрерывно дифференцируемы по x (см. [11]). Отсюда, в силу равномерной сходимости ряда Неймана, следует, что, во-первых, W_0 принадлежит $C^{2,1}(H)$ и в силу единственности решения (5) совпадает с решением задачи Коши, а во-вторых, $W_i,\ i = 1,\ldots,m$ непрерывно дифференцируемы по x и $\partial W_0/\partial x_i = W_i$. □

Remark 1. Если отбросить условие c) теоремы, то относительно гладкости построенного в виде суммы ряда Неймана для (5) решения W можно утверждать лишь, что $W_0 \in C^{1,0}(H)$, $W_i, i = 1,\ldots,m$ – непрерывные функции и $\partial W_0/\partial x_i = W_i$. В этом случае W_0 является обобщённым в смысле [13] решением задачи Коши.

Заметим также, что для того, чтобы существовало ограниченное решение системы (5), достаточно ограниченности почти всюду коэффициентов уравнения и начальных данных. Непрерывная функция W_0 в этом случае может быть принята за ещё одно независимое определение обобщённого решения.

□

2. Стохастические алгоритмы решения задачи Коши

2.1. Общий случай

В процессе доказательства теоремы 1 были использованы неравенства (7), (13), (14), утверждающие ограниченность модулей ядер, входящих в интегральный оператор $\mathcal{K}$, и свободного члена уравнения (5). Из этих соотношений следует, что сходимость ряда Неймана сохраняется и для системы интегральных уравнений

$$W^{(1)} = \mathcal{K}^{(1)} W^{(1)} + F^{(1)}, \tag{15}$$

отличающейся от (5) тем, что в ней ядра k_{ij} и функции F_i заменены на их модули. Этот факт позволяет использовать традиционные методы построения несмещённых монте-карловских оценок для решения уравнения (5), основанные на моделировании траекторий подходящей марковской цепи [12]. Для этого расширим область определения функций w, u_j, c, f, Z на всё пространство $X = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, продолжая их нулём на $\mathbb{R}^m \times (-\infty, 0)$ и сохраняя для них те же обозначения. Система (5) в результате может быть переписана в следующем равносильном виде:

$$W_i(x,t) = \int\limits_X dt' dx' \left[\sum_{j=0}^{m} k_{ij}(x,t;x',t') W_j(x',t') \right] + F_i(x,t), \quad i = 0, 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Обозначим $\xi_i^*(x,t)$ несмещённую сопряжённую оценку значения функции W_i в точке (x,t), а $p_0(x, t \to x', t')$ – переходную плотность марковской цепи, согласованную с ядрами $k_{0j}(x,t;x',t')$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Заметим, что специфика этих ядер такова, что одну плотность можно использовать для рандомизированного вычисления всех интегралов $\mathcal{K}_{0j} W_j$, $j = 0, 1, \ldots, m$ одновременно и, следовательно, не возникает необходимости в ветвлении по j.

Из соотношения

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} dx' Z(x - x', t - t') = 1,$$

верного для любых $t - t' > 0$ [13], и (6) следует, что условие согласования (ограниченность отношений k_{0j}/p_0) будет выполняться, если положить

$$\begin{aligned} p_0(x, t \to x't') &= \frac{q_0}{t}\, Z(x - x', t - t') \\ &= \begin{cases} \dfrac{q_0}{t}\, \left(4\pi\nu(t - t')\right)^{-m/2} \exp\left(-\dfrac{|x - x'|^2}{4\nu(t - t')} \right), & t > t' > 0, \\ 0 & \text{, иначе.} \end{cases} \end{aligned} \tag{17}$$

Обозначим $c_0 = c(x_{n+1}, t_{n+1})$, $c_j = -u_j(x_{n+1}, t_{n+1})$, $j = 1, \ldots, m$, а весовой множитель

$$\frac{k_{0j}(x_n, t_n; x'_{n+1}, t'_{n+1})}{p_0(x_n, t_n \to x'_{n+1}, t'_{n+1})} = a_0 c_j, \quad \text{где} \quad a_0 = \begin{cases} \dfrac{t_n}{q_0} & \text{, с вероятностью } q_0, \\ 0 & \text{, с вероятностью } 1 - q_0. \end{cases} \tag{18}$$

Тогда рандомизация нулевого уравнения системы (16), приводит к следующему рекуррентному соотношению

$$\xi_0^*(x_n,t_n)=\sum_{j=0}^{m}a_0c_j\xi_j^*(x'_{n+1},t'_{n+1})+F_0(x_n,t_n), \tag{19}$$

которое определяет оценку для функции W_0. Здесь $x'_{n+1}=x_n+2(\nu(t_n-t'_{n+1})\gamma'_{\frac{m}{2}})^{1/2}\omega'$, $t'_{n+1}=\alpha' t_n$, α' – выборочное значение равномерно распределённой на отрезке $[0,1]$ случайной величины, $\gamma'_{\frac{m}{2}}$ – γ-распределённая с параметром $m/2$ случайная величина, а ω' – единичный вектор с изотропным случайным направлением.

Совершенно аналогично из (6) следует, что для всех k_{ij} при $i>0$ существует такая плотность p_1, что весовые множители k_{ij}/p_1 будут ограниченными. Особенности этих ядер, однако, таковы, что нельзя положить $p_1=p_0$, выписать рекуррентное соотношение для оценки сразу всей вектор-функции W и, таким образом, построить векторную оценку метода Монте-Карло. Поэтому в качестве переходной плотности выбирается функция

$$\begin{aligned}&p_1(x,t\to x''t'')\\&=\begin{cases}q_1\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\dfrac{\nu^{\frac12}}{t^{\frac12}\pi^{\frac{m}{2}}}\dfrac{|x-x''|}{(4\nu(t-t''))^{\frac{m}{2}+1}}\exp\left(-\dfrac{|x-x''|^2}{4\nu(t-t'')}\right), & t>t''>0,\\ 0 & \text{, иначе.}\end{cases}\end{aligned} \tag{20}$$

а оценки $\xi_i^*,\ i>0$ определяются из следующей системы рекуррентных соотношений, правая часть которой зависит также и от ξ_0^*:

$$\xi_i^*(x_n,t_n)=\sum_{j=0}^{m}a_ic_j\xi_j^*(x''_{n+1},t''_{n+1})+F_i(x_n,t_n), \tag{21}$$

Здесь $x''_{n+1}=x_n+2(\nu(t_n-t''_{n+1})\gamma''_{\frac{m+1}{2}})^{1/2}\omega''$, $t''_{n+1}=(1-\alpha''^2)t_n$, при этом α'' , $\gamma''_{\frac{m+1}{2}}$, ω'' и α' , $\gamma'_{\frac{m}{2}}$, ω' попарно независимы, а весовой множитель

$$\frac{k_{ij}(x_n,t_n;x''_{n+1},t''_{n+1})}{p_1(x_n,t_n\to x''_{n+1},t''_{n+1})}=a_ic_j,\ \text{где } a_i=\begin{cases}\dfrac{2}{q_1}\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\dfrac{t_n^{\frac12}}{\nu^{\frac12}}\omega''_i & \text{, с вероятностью } q_1,\\ 0 & \text{, с вероятностью } 1-q_1.\end{cases} \tag{22}$$

Таким образом, оценка, несмотря на линейность интегрального уравнения, строится на траекториях ветвящейся марковской цепи, каждая точка которой (x_n,t_n) с вероятностями q_0 и q_1 порождает в следующем поколении независимые точки (x'_{n+1},t'_{n+1}) и (x''_{n+1},t''_{n+1}) , распределённые с плотностями p_0 и p_1 соответственно.

Theorem 2. *Рекуррентные соотношения* (19), (21) *определяют несмещённую оценку с конечной дисперсией для решения задачи Коши* (1), (2) *и его первых производных по пространственным переменным в точке* (x_0,t_0).

Доказательство. Для доказательства несмещённости достаточно показать, что оценка реализуема (то есть среднее число точек ветвящейся цепи конечно), её математическое ожидание конечно и удовлетворяет интегральному уравнению $\mathbf{(16)}$. По построению среднее число точек, порождаемое в $\boldsymbol{n+1}$-ом поколении одной точкой $\boldsymbol{n}$-го поколения не превосходит $\boldsymbol{q_0+q_1}$, и, следовательно, достаточно положить $\boldsymbol{q_0+q_1<1}$, чтобы оценка была реализуема. В таком случае можно продолжить рекуррентные соотношения $\mathbf{(19)}$, $\mathbf{(21)}$ вплоть до момента обрыва цепи и вычислить математическое ожидание получаемого выражения. Выписывать его в явном виде не имеет никакого смысла, так как оно довольно громоздко и не несёт никакой дополнительной информации. Главное, что его среднее конечно в силу сходимости ряда Неймана для оператора $\boldsymbol{\mathcal{K}^{(1)}}$. (См. [12], [14], [15]). Несмещённость следует непосредственно из $\mathbf{(19)}$, $\mathbf{(21)}$. Достаточно применить почленно к этим соотношениям оператор математического ожидания (что правомерно в силу конечности $\boldsymbol{\mathbb{E}\xi_i^*(x,t)}$ для всех $\boldsymbol{i,x,t}$).

Для того, чтобы показать конечность дисперсии каждой из оценок $\boldsymbol{\xi_i^*(x_0,t_0)}$, воспользуемся $\mathbf{(19)}$, $\mathbf{(21)}$ и выпишем рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют их вторые моменты $\boldsymbol{\psi_{ij}^* \equiv \mathbb{E}\xi_i^*\xi_j^*}$. В силу независимости $\boldsymbol{\xi_0^*}$ и $\boldsymbol{\xi_i^*}$ при $\boldsymbol{i>0}$ $\boldsymbol{\psi_{0i}^*=W_0W_i}$. Для $\boldsymbol{i=k=0}$ и при $\boldsymbol{i,k>0}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi_{ik}^*} &= \boldsymbol{\int\limits_X a_i c k_{k0}\psi_{00}^* + \int\limits_X \frac{1}{p_1}\,\vec{k}_i\Psi^*\vec{k}_k^T} \\ &\quad \boldsymbol{+\sum_{j=1}^m\int\limits_X a_k c k_{ij}W_0W_j + \sum_{l=1}^m\int\limits_X a_i c k_{kl}W_0W_l + F_iW_k + F_kW_i - F_iF_k,}\end{aligned} \tag{23}$$

где $\boldsymbol{\Psi^*=\{\psi_{ik}^*\}_{i,k=1}^m}$, $\boldsymbol{\vec{k}_i=(k_{i1},\dots,k_{im})}$. Эти соотношения также могут быть продолжены вплоть до момента обрыва марковской цепи, и, таким образом, достаточно показать, что ряд, который определяет итерационное решение системы уравнений, получаемой из $\mathbf{(23)}$ с помощью замены ядер и свободных членов на их модули, сходится. Действительно, из ограниченности функций $\boldsymbol{a_i,c_i,i=0,1,\dots,m}$ и слабой полярности $\boldsymbol{k_{ik}}$ следует, что ядра системы $\mathbf{(23)}$ также слабо полярны. Поэтому, учитывая ограниченность $\boldsymbol{W}$ и соотношения $\mathbf{(13)}$, $\mathbf{(14)}$, можно применить лемму 1, из которой и следует сходимость ряда. Таким образом, все $\boldsymbol{\psi_{ik}^*}$ – ограниченные функции, что и даёт конечность дисперсий оценок, определяемых рекуррентными соотношениями $\mathbf{(19)}$, $\mathbf{(21)}$. □

Remark 2. При построении оценки неявно предполагалось, что функции F_i точно известны. В действительности же аналитическое вычисление интегралов в (6) не представляется возможным. Заметим, однако, что в силу принципа двойной рандомизации вместо F_i можно использовать их несмещённые оценки [12], например [8]:

$$\xi[F_0](x_n,t_n)=w_0\left(x_n+2(\nu t_n\gamma_{\frac{m}{2}})^{1/2}\omega\right)+t_nf\left(x_n+2(\nu(1-\alpha)t_n\gamma_{\frac{m}{2}})^{1/2}\omega,\alpha t_n\right),$$

где, в частности, можно положить $\alpha=\alpha'$, $\omega=\omega'$, $\gamma_{\frac{m}{2}}=\gamma'_{\frac{m}{2}}$,

$$\xi[F_i](x_n, t_n) = -\frac{\omega_i}{(\nu t_n)^{1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$
$$\times \left(w_0\left(x_n + 2(\nu t_n \gamma_{\frac{m+1}{2}})^{1/2}\omega\right) + 2t_n f\left(x_n + 2\alpha(\nu t_n \gamma_{\frac{m+1}{2}})^{1/2}\omega, (1-\alpha^2)t_n\right)\right),$$

где точно так же можно положить $\alpha = \alpha''$, $\omega = \omega''$, $\gamma_{\frac{m+1}{2}} = \gamma''_{\frac{m+1}{2}}$. При этом несколько видоизменяется выражение для свободного члена в рекуррентном соотношении для вторых моментов (23), но утверждение теоремы 2 остаётся верным.

□

2.2. Решение уравнения в случае $c = 0$

Рассмотрим теперь задачу Коши (1), (2) при $c = 0$. Соотношения (16) распадаются в этом случае на две части: уравнения для компонент вектора производных $\vec{W} = (W_1, \ldots, W_m)^T$ представляют собой замкнутую систему

$$\vec{W} = \mathcal{K}'\vec{W} + \vec{F},$$

интегральный функционал от решения которой даёт решение задачи W_0. Подобная ситуация традиционна для теории методов Монте-Карло, что позволяет строить стандартные векторные оценки. Здесь $\mathcal{K}'$ – интегральный оператор с матрицей ядер $K' = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^m$, $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_m)^T$.

Определим вначале сопряжённую оценку для вычисления значения решения в точке (x, t). Она строится в соответствии с соотношениями (19), (21) на траекториях марковской цепи с переходной плотностью (20). Заметим, что ветвления здесь, в отличие от общего случая, не происходит.

Обозначим $\vec{\xi}^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*)^T$. Тогда (19) можно переписать как

$$\xi_0^*(x, t) = \frac{\vec{k}_0(x, t; x_0, t_0)\vec{\xi}^*(x_0, t_0)}{p_0(x, t \to x_0, t_0)} + F_0(x, t).$$

В условиях конечности среднего числа точек марковской цепи ($q_1 < 1$) обозначим N случайный номер последней перед обрывом точки. Тогда

$$\vec{\xi}^*(x_0, t_0) = \sum_{n=0}^{N} Q_n^* \vec{F}(x_n, t_n), \tag{24}$$

где

$$Q_{n+1}^* = A_n^*\, Q_n^*,$$

– матричные веса, $Q_0^* = E$ – единичная матрица,

$$A_n^* = \frac{K'(x_n, t_n; x_{n+1}, t_{n+1})}{p_1(x_n, t_n \to x_{n+1}, t_{n+1})} = \{a_i c_j\}_{i,j=1}^m.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\xi_0^*(x,t) &= \sum_{n=0}^{N} -a_0\vec{u}(x_0,t_0)\cdot Q_n^*\vec{F}(x_n,t_n) + F_0(x,t)\\ &= \sum_{n=0}^{N} \vec{F}(x_n,t_n)\cdot \vec{Q}_n^* + F_0(x,t),\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\vec{Q}_0^* = \frac{\vec{k}_0^T(x,t;x_0,t_0)}{p_0(x,t\to x_0,t_0)} = -a_0\vec{u}(x_0,t_0), \quad \vec{Q}_{n+1}^* = A_n^{*T}\ \vec{Q}_n^*,$$

– векторные веса (см.[16]). Несмещённость и конечность дисперсии оценок (24), (25) с очевидностью следуют из теоремы 2. При этом система соотношений (23) для $i,j=1,\dots,m$ принимает классический вид интегрального уравнения для матрицы вторых моментов [16]:

$$\Psi^* = \int\limits_X \frac{K'\Psi^* K'^T}{p_1} + \vec{F}\vec{W}^T + \vec{W}\vec{F}^T - \vec{F}\vec{F}^T, \tag{26}$$

через которую выражается дисперсия оценки ξ_0^*:

$$\mathbb{D}\xi_0^* = \int\limits_X \frac{\vec{k}_0\Psi^*\vec{k}_0^T}{p_0} - (W_0-F_0)^2. \tag{27}$$

Remark 3. Векторная оценка (24) позволяет вычислять градиент решения $\vec{W}$ в заданной точке (x_0,t_0), не находя самого решения.

□

Определим теперь прямую оценку для решения задачи Коши. Её построение основано на известном интегральном соотношении

$$\left(\vec{H},\vec{W}\right) = \left(\vec{W}^*,\vec{F}\right), \tag{28}$$

выполняющемся в условиях сходимости ряда Неймана. Здесь

$$\vec{W}^* = \mathcal{K}'^*\vec{W}^* + \vec{H}$$

– решение сопряжённого уравнения, $\mathcal{K}'^*$ – интегральный оператор с матрицей ядер $K'^* = \{k_{ij}^*\}_{i,j=1}^m$, $k_{ij}^*(x,t;x',t') = k_{ji}(x',t';x,t)$. Таким образом (здесь $\vec{H}(x',t') = \vec{k}_0^T(x,t;x't')$)

$$w(x,t) = \mathbb{E}\xi(x,t),$$

$$\xi(x,t) = \vec{Q}_0^*\cdot\vec{\xi}(x_0',t_0') + F_0(x,t), \tag{29}$$

$$\vec{\xi}(x_0', t_0') = \sum_{n=0}^{N} Q_n \vec{k}_0^T(x, t; x_n', t_n'), \tag{30}$$

где

$$Q_0 = E, \quad Q_{n+1} = A_n^T Q_n \tag{31}$$

– матричные веса,

$$\vec{Q}_0 = \frac{\vec{F}(x_0', t_0')}{p_{0,2}(x_0', t_0')}.$$

Здесь

$$A_n^T = \frac{K'^*(x_n', t_n'; x_{n+1}', t_{n+1}')}{p_2(x_n', t_n'; x_{n+1}', t_{n+1}')} = \frac{K'^T(x_{n+1}', t_{n+1}'; x_n', t_n')}{p_2(x_n', t_n'; x_{n+1}', t_{n+1}')}, \tag{32}$$

Обозначим

$$\vec{Q}_{n+1} = A_n \vec{Q}_n \tag{33}$$

– векторные веса. Тогда соотношение (29) можно переписать в виде

$$\xi(x, t) = \sum_{n=0}^{N} \vec{k}_0(x, t; x_n', t_n') \vec{Q}_n + F_0(x, t), \tag{34}$$

Дисперсия прямой оценки в полной аналогии с (27) выражается через матрицу вторых моментов случайного вектора ξ :

$$\mathbb{D}\xi_0 = \int\limits_X \frac{\vec{F} \cdot \Psi \vec{F}}{p_{0,2}} - (W_0 - F_0)^2, \tag{35}$$

удовлетворяющей соответствующему интегральному уравнению

$$\Psi = \int\limits_X \frac{K'^* \Psi K'^{*T}}{p_2} + \vec{H}\vec{W}^{*T} + \vec{W}^* \vec{H}^T - \vec{H}\vec{H}^T. \tag{36}$$

Заметим, что ядро $K'(x, t; x', t')$ несимметрично по своим аргументам, и, следовательно, плотность $p_1(x, t \to x', t')$ уже не будет согласована с $K'(x', t'; x, t)$. По этой причине прямая оценка строится на марковской цепи $\{(x_n', t_n'), n = 0, 1, \ldots\}$, плотность распределения начальной точки которой $p_{0,2}$ выбирается из условия её согласования с $\vec{F}$, а в качестве переходной плотности используется функция, равная

$$\begin{aligned} &p_2(x_n', t_n' \to x_{n+1}' t_{n+1}') \\ &\qquad = q_2 \, \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \frac{\nu^{\frac{1}{2}}}{(t - t_n')^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{m}{2}}} \frac{|x_n' - x_{n+1}'|}{\left(4\nu(t_{n+1}' - t_n')\right)^{\frac{m}{2}+1}} \exp\left(-\frac{|x_n' - x_{n+1}'|^2}{4\nu(t_{n+1}' - t_n')}\right), \\ &\qquad \text{при} \quad t > t_{n+1}' > t_n', \end{aligned} \tag{37}$$

и нулю во всех остальных случаях.

Отсюда следует, что $x'_{n+1} = x'_n + 2(\nu(t'_{n+1} - t'_n)\gamma'_{\frac{m+1}{2}})^{1/2}\omega'$, $t'_{n+1} = t'_n + (t - t'_n)\alpha'^2$, и, как видим, конструктивно марковская цепь (x'_n, t'_n) отличается от цепи (x_n, t_n), используемой при построении сопряжённой оценки, только соотношением между моментами времени: последовательность $\{t'_n\}$ монотонно возрастает, а $\{t_n\}$ – убывает. Весовые множители имеют при использовании p_2 следующий вид:

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{2}{q_2} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \dfrac{(t - t'_n)^{\frac{1}{2}}}{\nu^{\frac{1}{2}}} \, \omega_j \; u_i(x'_n, t'_n) & \text{, с вероятностью } q_2, \\ 0 & \text{, с вероятностью } 1 - q_2. \end{cases} \tag{38}$$

Несмещённость и конечность дисперсии прямой оценки в полной аналогии с доказательством теоремы 2 следуют из соотношений (28), (35), (36), (38).

Remark 4. На естественный вопрос о предпочтении одной из оценок (25), (29) нельзя дать однозначного ответа, так как a priori неясно, какая из них имеет меньшую дисперсию. Следует отметить, однако, что построение марковской цепи (x'_n, t'_n) не зависит от точки (x, t), в которой вычисляется решение. Поэтому прямую оценку целесообразно использовать в том случае, когда требуется найти $w(x, t)$ одновременно во многих точках. Если же исходная задача поставлена так, что необходимо вычислить значения градиента в этих точках, не находя при этом самого решения, то предпочтительным может оказаться использование локально-векторной оценки.

□

Построение локально-векторной оценки основано на соотношении, аналогичном (28). Определим матричнозначную функцию W^* равенством

$$\int\limits_X K'(x, t; x', t')\vec{W}(x', t') = \int\limits_X W^*(x, t; x', t')\vec{F}(x', t').$$

Это означает, что W^{*T} есть сумма ряда Неймана для интегрального уравнения

$$W^{*T} = \mathcal{K}'^* W^{*T} + K'^T.$$

Отсюда следует, что случайная матрица ζ, определяемая равенством

$$\zeta(x, t; x_0, t_0) = \sum_{n=0}^{N} K'(x, t; x_n, t_n) Q_n,$$

или, что равносильно, рекуррентным соотношением

$$\zeta(x, t; x_n, t_n) = \zeta(x, t; x_{n+1}, t_{n+1}) \frac{K'(x_{n+1}, t_{n+1}; x_n, t_n)}{p_2(x_n, t_n; x_{n+1}, t_{n+1})} + K'(x, t; x_n, t_n), \tag{39}$$

будет несмещённой оценкой для $W^*(x, t; x_0, t_0)$.

Таким образом,

$$\vec{\zeta}(x,t) = \zeta(x,t;x_0,t_0)\vec{Q}_0 + \vec{F}(x,t)$$
$$= \sum_{n=0}^{N} K'(x,t;x_n,t_n)\vec{Q}_n + \vec{F}(x,t) \tag{40}$$

есть несмещённая локально-векторная оценка для $\vec{W}(x,t)$. Здесь весовые матрицы Q_n и векторные веса $\vec{Q}_n$ определяются соотношениями (31), (33), (38).

Что касается конечности дисперсии этой оценки, то очевидно, что ограниченность элементов матрицы вторых моментов полностью определяется массивом матриц

$$\Theta^{ip} = \{\mathbb{E}\zeta_{ij}\zeta_{pq}\}_{i,q=1}^{m},\ i,p = 1,\ldots,m.$$

Из рекуррентного соотношения (39) следует, что каждая из этих матриц есть сумма ряда Неймана для соответствующего интегрального уравнения:

$$\Theta^{ip} = \int\limits_X \frac{K'^T\Theta^{ip}K'}{p_2} + \vec{L}_i^T\vec{k}_p + \vec{k}_i^T\vec{L}_p + \vec{k}_i^T\vec{k}_p,\ i,p = 1,\ldots,m. \tag{41}$$

Здесь $\vec{L}_i = ((W^*K')_{i1},\ldots,(W^*K')_{im})$. Сходимость ряда и, следовательно, конечность вторых моментов для локально-векторной оценки следуют из леммы 1 и ограниченности весовых множителей (38).

3. Решение краевой задачи

3.1. Интегральная формулировка

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1) во внешности ограниченной односвязной области G_0 с односвязной границей Γ:

$$w(y,t)\Big|_{y\in\Gamma} = g(y,t), \quad t \in (0,T], \tag{42}$$

при начальных условиях (2), выполняющихся в области $G = \mathbb{R}^m \backslash \overline{G}_0$ и согласованных с (42). Полагая, что g – непрерывная функция, а Γ – достаточно гладкая поверхность, решение задачи будем искать в виде суммы тепловых потенциалов

$$\begin{aligned} w(x,t) = &\int\limits_0^t dt' \int\limits_G dx' Z(x-x',t-t') \\ &\times \left[-(u\cdot\nabla)w(x',t') + c(x',t')w(x',t') + f(x't')\right] \\ &+ \int\limits_G dx' Z(x-x',t)w_0(x') \\ &+ \int\limits_0^t dt' \int\limits_\Gamma d\sigma(y') 2\frac{\partial Z}{\partial n(y')}(x-y',t-t')\mu(y',t'). \end{aligned} \tag{43}$$

Здесь $n(y')$ – нормаль к Γ в точке y', направленная в G_0, $(x,t) \in \mathcal{X} \equiv G \times (0,T]$, $(y,t) \in \mathcal{Y} \equiv \Gamma \times (0,T]$. Заметим, что неограниченность области G, как будет ясно из дальнейшего, непринципиальна. Условие это, однако, позволяет строить наиболее эффективные в вычислительном отношении оценки.

Представление (43), в отличие от (3), нельзя почленно дифференцировать, ибо производные потенциала двойного слоя при стремлении x к границе Γ становятся в пределе сингулярными интегралами.

Поступим следующим образом. Применим к потенциалу, содержащему градиент функции w, формулу Остроградского. В предположении равномерной ограниченности $|\nabla w(x,t)|$ при $|x| \to \infty$ имеем

$$w = K_1 w + K_2 w + K_3 \mu + F, \tag{44}$$

где K_i – интегральные операторы с ядрами соответственно

$$\begin{aligned} k_1(x,t;x't') &= Z(x-x',t-t')\left[\mathrm{div} u(x',t') + c(x',t')\right], \\ k_2(x,t;x't') &= (u(x',t')\cdot\nabla_{x'})Z(x-x',t-t'), \\ k_3(x,t;y',t') &= 2\frac{\partial Z}{\partial n(y')}(x-y',t-t') \\ &= \frac{|x-y'|\cdot\cos\varphi_{y'x}}{(4\pi)^{m/2}(\nu(t-t'))^{m/2+1}}\exp\left(-\frac{|x-y'|^2}{4\nu(t-t')}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x,t) = &\int\limits_0^t dt' \int\limits_G dx' Z(x-x',t-t')f(x',t') \\ &+ \int\limits_G dx' Z(x-x',t)w_0(x') \\ &- \int\limits_0^t dt' \int\limits_\Gamma d\sigma(y')Z(x-y',t-t')(u(x',t')\cdot n(x',t'))g(y',t'). \end{aligned}$$

Здесь $\varphi_{y'x} = \angle(n(y'), x-y')$, а в последнем интеграле учтено краевое условие (42).

Для того, чтобы получить ещё одно интегральное уравнение для неизвестной функции μ, достаточно перейти в соотношении (44) к пределу при $x \to y \in \Gamma$ и воспользоваться предельными свойствами поверхностного потенциала, определённого на гладкой поверхности. В результате получаем

$$\mu = K_1^b w + K_2^b w + K_3^b \mu + F^b - g, \tag{45}$$

где K_i^b – интегральные операторы с ядрами $k_1(y,t;x',t')$, $k_2(y,t;x',t')$ и $k_3(y,t;y',t')$ соответственно, F^b – граничное значение функции F.

Theorem 3. *Пусть*
a) $u_j(x,t), j=1,\ldots,m$ непрерывно дифференцируемы по x, непрерывны и ограничены в $\overline{\mathcal{X}}$;
b) $c(x,t)$, $f(x,t)$ непрерывны в $\mathcal{X}$, ограничены и непрерывны по Гёльдеру относительно x

равномерно по t;
c) $w_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\overline{G}$;
d) $g(y,t)$ непрерывна и ограничена в $\overline{\mathcal{Y}}$;
e) граница области Γ – ляпуновская из класса $L_1(B,\lambda)$ [17].

Тогда ряд Неймана для системы уравнений (44), (45) *сходится к вектор-функции $(\tilde{w},\tilde{\mu})^T$ с компонентами $\tilde{w}$ из $L_\infty(\mathcal{X})$ и $\tilde{\mu}$ из $L_\infty(\mathcal{Y})$. При этом $\tilde{w}$ есть решение краевой задачи* (1), (2), (42).

Доказательство. Отметим, во-первых, что в условиях теоремы решение краевой задачи существует и единственно [10]. Покажем, что оно может быть получено посредством суммирования ряда Неймана для системы $\mathbf{(44)}$, $\mathbf{(45)}$. Доказательство сходимости ряда основано, как и в теореме 1, на неравенствах вида $\mathbf{(9)}$. Действительно, в силу ограниченности $\boldsymbol{u_j}$ и $\boldsymbol{c}$ ядра $\boldsymbol{k_1}$ и $\boldsymbol{k_1^b}$ принадлежат классу $\boldsymbol{K_{0,0}}$ в области их определения и, следовательно, слабо полярны с параметром $\boldsymbol{\delta_1 = 1}$. Ядра $\boldsymbol{k_2,\ k_2^b \in K_{1,1}}$ и слабо полярны с параметром $\boldsymbol{\delta_1 = 0.5}$. На ляпуновской поверхности класса $\boldsymbol{L_1(B,\lambda)}$ ядро $\boldsymbol{k_3^b}$, определённое на $\boldsymbol{\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}}$, принадлежит $\boldsymbol{K_{1,1+\lambda}}$ (см.[8]). Условия слабой полярности для таких ядер есть $\boldsymbol{\delta_3 = (\beta - 2\alpha + 1)/2 > 0}$ и $\boldsymbol{m + \beta - 1 > 0}$. Здесь $\boldsymbol{\delta_3 = \lambda/2}$. Что касается ограниченного оператора $\boldsymbol{K_3}$, то его ядро определено на $\boldsymbol{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$, не является слабо полярным на $\boldsymbol{\Gamma}$, и он не обладает свойством $\mathbf{(9)}$.

Для того, чтобы воспользоваться леммой 1, обозначим $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ матрично-интегральный оператор системы $\mathbf{(44)}$, $\mathbf{(45)}$ и запишем её в следующем равносильном виде:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix} &= \mathcal{K}\begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ F^b - g \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{K}^2\begin{pmatrix} w \\ \mu \end{pmatrix} + \mathcal{K}\begin{pmatrix} F \\ F^b - g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ F^b - g \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{46}$$

Используя технику [18], легко можно показать, что свободный член $\mathbf{(46)}$ – ограниченная функция. Рассмотрим теперь интегральный оператор $\boldsymbol{\mathcal{K}^2}$. Очевидно, что все скалярные интегральные операторы, входящие в его определение, являются суммами попарных произведений операторов $\boldsymbol{K_i,\ K_i^b}$, один из которых обязательно слабо полярный. Отсюда следует, что для всех компонент оператора $\boldsymbol{\mathcal{K}^2}$ выполняется неравенство $\mathbf{(9)}$, что и обеспечивает возможность применения леммы 1 к $\mathbf{(46)}$. Таким образом, ряд Неймана для системы $\mathbf{(44)}$, $\mathbf{(45)}$ сходится, причём сходимость эта равномерная и сохраняется при замене ядер интегральных операторов на их модули.

Обозначим $\boldsymbol{(\tilde{w},\tilde{\mu})^T}$ решение $\mathbf{(44)}$, $\mathbf{(45)}$. Для доказательства гладкости $\boldsymbol{\tilde{w}}$ рассмотрим $\boldsymbol{F}$. В силу условий теоремы объёмный потенциал с плотностью $\boldsymbol{f}$ принадлежит $\boldsymbol{C^{2,1}(\mathcal{X})}$, а поверхностный потенциал с плотностью $\boldsymbol{w_0}$ и потенциал простого слоя с непрерывной плотностью $\boldsymbol{(u\cdot n)g}$ бесконечно дифференцируемы. Потенциал двойного слоя с непрерывной плотностью $\boldsymbol{\tilde{\mu}}$ также бесконечно дифференцируем. Отсюда следует, что в силу равномерной сходимости ряда, $\boldsymbol{\tilde{w} \in C^{2,1}(\mathcal{X})}$. Эта функция удовлетворяет $\mathbf{(44)}$, а следовательно, $\mathbf{(42)}$ и исходному дифференциальному уравнению. Выполнение граничных условий $\mathbf{(42)}$ с очевидностью следует из системы $\mathbf{(44)}$, $\mathbf{(45)}$. В силу единственности $\boldsymbol{\tilde{w}}$ совпадает с решением краевой задачи. □

3.2. Оценка решения первой краевой задачи

Абсолютная (в смысле (15)) сходимость ряда Неймана для системы (44), (45) позволяет построить несмещённую оценку решения краевой задачи. Заметим, однако, что эта система записана для функций, заданных на различных множествах и рассматриваемых в различных пространствах, что не позволяет строить весовые векторные оценки. Одним из путей преодоления этого затруднения является построение скалярной сопряжённой оценки на основе моделирования ветвящейся марковской цепи.

Продолжим функции, заданные на $\mathcal{X}$, на всё X, а функции, заданные на $\mathcal{Y}$, – на $Y = \Gamma \times \mathbb{R}$, полагая их равными нулю при $t < 0$ и при $x \in G_0$. Обозначим $\xi^*[w](x,t)$ и $\xi^*[\mu](y,t)$ – несмещённые оценки для $w(x,t)$ и $\mu(y,t)$ соответственно. Тогда прямая рандомизация (44) приводит к рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned}\xi^*[w](x_n,t_n) = {} & a_0\chi_G(x'_{n+1})(\mathrm{div}u(x'_{n+1},t'_{n+1}) + c(x'_{n+1},t'_{n+1}))\, \xi^*[w](x'_{n+1},t'_{n+1}) \\ & -\chi_G(x''_{n+1})(u(x''_{n+1},t''_{n+1})\cdot a)\, \xi^*[w](x''_{n+1},t''_{n+1}) \\ & +\sum_{j=1}^{2k} \chi_\Gamma^j b_j\, \xi^*[\mu](y^j_{n+1},t^j_{n+1}) + F(x_n,t_n).\end{aligned} \tag{47}$$

Здесь с учётом особенностей интегральных операторов, входящих в интегральное уравнение, (x'_{n+1},t'_{n+1}) распределена в X с плотностью $p_0(x_n,t_n \to x'_{n+1},t'_{n+1})$, (x''_{n+1},t''_{n+1}) – с плотностью $p_1(x_n,t_n \to x'_{n+1},t'_{n+1})$, а точки (y^j_{n+1},t^j_{n+1}) – в Y с плотностью перехода B-процесса нестационарного случайного блуждания по границе [19]:

$$\overline{p}(x_n,t_n \to y,t) = \frac{\nu|x_n-y|\,|\cos\varphi_{yx_n}|}{(4\pi)^{m/2}(\nu(t_n-t))^{m/2+1}}\exp\left(-\frac{|x_n-y|^2}{4\nu(t_n-t)}\right) q\,. \tag{48}$$

Это означает, что $y^j_{n+1} = x_n + r^j_n\omega$, где r^j_n определяются из условия пересечения прямой с изотропным направлением ω с границей Γ, $2k \geq 0$ – число этих пересечений (чётное с вероятностью 1),

$$t^j_{n+1} = t_n - \frac{(r^j_n)^2}{4\nu\gamma_{\frac{m}{2}}}\,.$$

Коэффициенты a_0 и $a = (a_1,\ldots,a_m)^T$ определены соотношениями (18) и (22),

$$b_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu q}\,\mathrm{sign}\left(\cos\varphi_{y^j_{n+1}x_n}\right), & \text{с вероятностью } q, \\ 0 & \text{, с вероятностью } 1-q. \end{cases} \tag{49}$$

а индикаторные функции χ_G и

$$\chi^j_\Gamma = \begin{cases} 1\,, & \text{при } k>0 \text{ и } t^j_{n+1} > 0\,, \\ 0\,, & \text{иначе}\,, \end{cases}$$

определяют геометрические условия обрыва соответствующей ветви марковской цепи.

Совершенно аналогично рандомизация (45) позволяет записать рекуррентное соотношение, определяющее оценку для μ :

$$\begin{aligned}\xi^*[\mu](y_n,t_n) = {} & a_0\chi_G(x'_{n+1})(\mathrm{div}u(x'_{n+1},t'_{n+1}) + c(x'_{n+1},t'_{n+1}))\,\xi^*[w](x'_{n+1},t'_{n+1}) \\ & -\chi_G(x''_{n+1})(u(x''_{n+1},t''_{n+1})\cdot a)\,\xi^*[w](x''_{n+1},t''_{n+1}) \\ & +\sum_{j=1}^{2k-1}\chi^j_\Gamma b_j\,\xi^*[\mu](y^j_{n+1},t^j_{n+1}) + F(y_n,t_n) - g(y_n,t_n),\end{aligned} \tag{50}$$

где (x'_{n+1},t'_{n+1}), (x''_{n+1},t''_{n+1}), (y^j_{n+1},t^j_{n+1}) определяются точкой (y_n,t_n) и соответствующими плотностями перехода p_0, p_1 и $\overline{p}$. Здесь число пересечений $2k-1$ положительно и с вероятностью единица нечётно.

Theorem 4. *При соответствующем выборе q_0, q_1, q рекуррентные соотношения* (47), (50) *определяют несмещённую оценку с конечной дисперсией для решения $w(x,t)$ краевой задачи* (1), (3), (42).

Доказательство. Определим в первую очередь условия реализуемости оценки. Обозначим $\boldsymbol{n_i^{(G)}},\ \boldsymbol{n_i^{(\Gamma)}}$ – среднее число точек марковской цепи в $\boldsymbol{i}$-м поколении в $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{\Gamma}$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n_{i+1}^{(G)} \le (q_0+q_1)n_i^{(G)} + (q_0+q_1)n_i^{(\Gamma)}},\\ \boldsymbol{n_{i+1}^{(\Gamma)} \le q2\overline{k}n_i^{(G)} + q(2\overline{k}-1)n_i^{(\Gamma)}},\end{aligned} \tag{51}$$

где $\boldsymbol{2\overline{k}}$ – максимально возможное для данной конфигурации границы количество её пересечений с прямой.

Введём в пространстве векторов $\boldsymbol{n = (n^{(G)}, n^{(\Gamma)})^T}$ норму $||\boldsymbol{n}|| = |\boldsymbol{n^{(G)}}| + |\boldsymbol{n^{(\Gamma)}}|$. Тогда среднее число точек марковской цепи равно

$$\sum_{\boldsymbol{i=0}}^{+\infty} ||\boldsymbol{n_i}||. \tag{52}$$

Из **(51)** следует, что

$$||\boldsymbol{n_{i+1}}|| \le ||\boldsymbol{Q}||\,||\boldsymbol{n_i}||,$$

где матрица

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q_0+q_1} & \boldsymbol{q_0+q_1} \\ \boldsymbol{q\,2\overline{k}} & \boldsymbol{q\,(2\overline{k}-1)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ряд **(52)** заведомо сходится, если $||\boldsymbol{Q}|| < \boldsymbol{1}$. Здесь норма матрицы, согласованная с нормой вектора $\boldsymbol{n}$, равна $\boldsymbol{q_0+q_1+q\,2\overline{k}}$. Следовательно, если $\boldsymbol{q_0 = q_1 = q = \mathbf{const}}$, то достаточно взять $\boldsymbol{q < 1/(2+2\overline{k})}$, чтобы оценка была реализуемой. В этих условиях её несмещённость с очевидностью следует из рекуррентных соотношений, её определяющих, и сходимости ряда Неймана для системы интегральных уравнений **(44)**, **(45)**.

Покажем теперь конечность дисперсии построенной оценки или, что равносильно, конечность вторых моментов $s[w] = \mathbb{E}(\xi^*[w])^2$ и $s[\mu] = \mathbb{E}(\xi^*[\mu])^2$. При конечности с вероятностью единица числа точек марковской цепи для этого достаточно показать, что сходится ряд Неймана для системы интегральных уравнений, которой они удовлетворяют при условии их существования. Из **(47)**, **(50)** имеем

$$\begin{aligned} s[w] &= K_{1,p0}s[w] + K_{2,p1}s[w] + K_{3,\overline{p}}s[\mu] + F_s[w], \\ s[\mu] &= K^b_{1,p0}s[w] + K^b_{2,p1}s[w] + K^b_{3,\overline{p}}s[\mu] + F_s[\mu], \end{aligned} \tag{53}$$

где

$$\begin{aligned} F_s[w] &= K_{3,\phi}\mu - K_{3,\overline{p}}\mu^2 + 2(K_1w\cdot K_2w + K_1w\cdot K_3\mu + K_2w\cdot K_3\mu) + F(2w - F), \\ F_s[\mu] &= K^b_{3,\phi}\mu - K_{3,\overline{p}}\mu^2 + 2(K^b_1w\cdot K^b_2w + K^b_1w\cdot K^b_3\mu + K^b_2w\cdot K^b_3\mu) \\ &\quad + (F^b - g)(2\mu - F^b + g). \end{aligned}$$

Здесь

$$K_{3,\phi}\mu(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} ds \oint d\phi \frac{1}{2\pi^{m/2}\nu^2 q} \exp(-s)s^{\frac{m}{2}-1}\left(\sum_{j=1}^{2k(\phi)} \chi^j_\Gamma \mathrm{sign}\left(\cos\varphi_{y^jx}\right)\mu(y^j,t^j)\right)^2,$$

$$t^j = t - \frac{|x-y^j|^2}{4\nu s},$$

а сумма под интегралом равна нулю, если прямая, проходящая через x и определяемая телесным углом ϕ, не пересекает Γ. Оператор $K^b_{3,\phi}\mu$ определяется аналогично.

Рассмотрим ядра интегральных операторов, входящих в систему **(53)**. Имеем

$$\begin{aligned} k_{1,p0}(x,t;x',t') &= \frac{k_1^2}{p_0}(x,t;x',t') = |k_1|\frac{t}{q_0}\chi_G(x')|\mathrm{div}u(x,t;x',t') + c(x,t;x',t')|, \\ k_{2,p1}(x,t;x',t') &= \frac{k_2^2}{p_1}(x,t;x',t') = |k_2|\chi_G(x')|u\cdot a|, \\ k_{3,\overline{p}}(x,t;y',t') &= \frac{k_3^2}{\overline{p}}(x,t;y',t') = |k_3|\chi_{\mathcal{Y}}(y',t')\frac{1}{\nu q}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в условиях теоремы ядра всех операторов, входящих в **(53)**, кроме ограниченного оператора $K_{3,\overline{p}}$, являются слабо полярными. В результате мы оказываемся в ситуации теоремы 3, и, следовательно, ряд Неймана для системы **(53)** сходится к ограниченному решению $s[w]$, $s[\mu]$, которое определяет конечную дисперсию построенной оценки. □

Заключение

Методы решения параболических уравнений, описанные в данной работе, основаны, как видим, на построении случайных последовательностей $(X(t_n), t_n)$, $(X'(t'_n), t'_n)$, $(Y(t''_n), t''_n)$ и представляют собой новые, причём конструктивно заданные, вероятностные представления. Здесь $X(t)$ – диффузионный процесс в $\mathbb{R}^m$ с переходной плотностью $p(x,t;x',t') = Z(x'-x, t'-t)$, $X'(t)$ – марковский процесс с переходной плотностью $Z(x'-x,t'-t)\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}|x'-x|/(4\nu(t'-t))^{1/2}$, а $Y(t''_n)$ – марковская цепь случайного блуждания по границе. При этом, в зависимости от вида оценки, марковские последовательности моментов времени являются либо убывающими (для сопряжённой), либо возрастающими (для прямой оценки).

Отметим, что алгоритмы решения рассматриваемых в данной работе линейных задач основаны на моделировании ветвящихся марковских цепей, что естественно скорее для нелинейных уравнений [14]. В то же время, как известно [16], метод расщепления (искусственного ветвления) является эффективным приёмом уменьшения дисперсии и в линейном случае. Априорное сравнение трудоёмкости различных методов решения параболических уравнений, к сожалению, вряд ли возможно в силу того, что оценки числа арифметических операций, достаточных для достижения заданной точности, весьма существенно зависят от конкретной постановки задачи. Заметим, однако, что прямые методы решения задачи Коши, основанные на дискретизации по времени и пошаговом моделировании траекторий диффузионного процесса, требуют $O(\varepsilon^{-3})$ арифметических действий для достижения заданной точности ε [20]. В то же время методы, предложенные в данной работе, имеют, в силу ограниченности дисперсии, трудоёмкость $O(\varepsilon^{-2})$.

Список литературы

[1] Bachelier L. Thèorie de la speculation// Ann. Èc. norm. sup., 1900, s.3, **17**, pp. 21-86.

[2] Егоров А. Д., Соболевский П. И., Янович Л. А. Приближённые методы вычисления континуальных интегралов. Минск: Наука и техника, 1985.

[3] Артемьев С. С. Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1993.

[4] Haji-Sheikh A., Sparrow E. M. The floating random walk and its application to Monte Carlo solutions of heat equations // SIAM J. Appl. Math., 1966, **14**, № 2, pp. 570–589.

[5] Сабельфельд К. К. Методы Монте-Карло в краевых задачах. Новосибирск: Наука, 1989.

[6] Курбанмурадов О. Метод блуждания по шароидам для решения уравнения теплопроводности // Теория и алгоритмы статистического моделирования. Новосибирск, 1984, с. 67–77.

[7] Джетыбаев Е. О., Сабельфельд К. К. Решение смешанной задачи для уравнений параболического и гиперболического типа методом Монте-Карло // Журн. вычисл. матем. и мат. физики, 1984, **24**, № 5, с. 677–685.

[8] Курбанмурадов О. А., Сабельфельд К. К., Симонов Н. А. Алгоритмы случайного блуждания по границе. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989.

[9] Chorin A. J. Numerical study of slightly viscous flow // J. Fluid Mech., 1973, **57**, pp. 785–796.

[10] Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук, 1962, **17**, вып.3, с. 3–147.

[11] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

[12] Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.

[13] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

[14] Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М.: Наука, 1984.

[15] Михайлов Г. А. Рекуррентные формулы и принцип Беллмана в методе Монте-Карло. Новосибирск, 1993. (Препринт / РАН, Сиб. отд-ние. ВЦ, 1001).

[16] Михайлов Г. А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1987.

[17] Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953.

[18] Расулов М. Л. Применение метода контурного интеграла к решению задач для параболических систем второго порядка. М.: Наука, 1975.

[19] Sabelfeld K. K., Simonov N. A. Random walks on boundary for solving PDEs. Utrecht: VSP, 1994.

[20] Елепов Б. С., Кронберг А. А., Михайлов Г. А., Сабельфельд К. К. Решение краевых задач методом Монте-Карло. Новосибирск: Наука, Сиб.отд., 1980.