МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ (Monte Carlo methods for convective diffusion equation)

Н. А. Симонов
(N. A. Simonov) *

Аннотация. В работе рассматривается уравнение конвективной диффузии в многомерном пространстве. Для первой краевой задачи, а также для задачи Коши на основе представления решения в виде суммы потенциалов строятся алгоритмы случайного блуждания, доказывается несмещённость и конечность дисперсии полученных оценок.

This paper deals with the convective diffusion equation in a multidimensional Euclidean space. Solutions to first boundary value problem and Cauchy problem are sought in the form of a sum of heat potentials. Random walk algorithms are constructed. The estimators obtained are proved to be unbiased and to have finite variance.

1. Уравнение конвективной диффузии и краевая задача

Рассмотрим уравнение конвективной диффузии во внешности ограниченной односвязной области G_0 с односвязной границей Γ

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^{m} u_i(x,t) \frac{\partial w}{\partial x_i},$$

или

$$w_t = \nu \Delta w - (u \cdot \nabla) w, \tag{1}$$

$$(x,t) \in H = G \times (0,T], \quad G = \mathbb{R}^m \setminus \overline{G}_0, \quad m \geq 2.$$

Здесь $u(x,t) = (u_1, u_2, ..., u_m)$ – ограниченное поле скоростей, а $\nu > 0$ – некоторый постоянный коэффициент.

Будем считать, что для уравнения (1) поставлена первая краевая задача, то есть известно начальное значение

$$w(x,0) = w_0(x), \quad x \in G, \tag{2}$$

а также граничные значения функции w:

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, Проект 94-01-00209

$$w(y,t)\Big|_{y\in\Gamma} \equiv \lim_{x\to y,\ x\in G} w(x,t) = g(y,t). \tag{3}$$

Монте-карловские алгоритмы для решения параболических уравнений известны достаточно давно. Начиная со ставшей уже классической работы [7], наибольшее внимание уделялось построению методов, в основании которых лежат разнообразные соотношения о среднем [13], [4], [10]. К этому же классу можно отнести и стохастические алгоритмы, основанные на использовании преобразования Лапласа [2]. Для уравнения теплопроводности использование поверхностных потенциалов позволило построить алгоритмы случайного блуждания по границе для решения различных краевых задач [11]. Построение при этом существенно опиралось на тот факт, что для данного уравнения в явном виде известно фундаментальное решение. Добавление конвективного члена с непостоянной скоростью кардинально изменяет ситуацию. В связи с этим отметим методы построения случайной оценки решения, описанные в [13], а также метод случайных вихрей в плоском случае [1], в котором на каждом шаге по времени решается уравнение типа (1) с помощью расщепления на конвективную и диффузионную составляющие и одноточечной рандомизации.

2. Интегральное уравнение для решения задачи Коши

Рассмотрим вначале задачу Коши (2) для уравнения (1) и будем искать её решение в виде суммы двух тепловых потенциалов

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \int_0^t dt' \int_G dx' Z(x-x',t-t')[-u\cdot\nabla]w(x',t') \\ &\quad + \int_G dx' Z(x-x',t) w_0(x') \\ &\equiv K^{(0)}w(x,t) + F_0(x,t). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $Z(x,t)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности, а $G = \mathbb{R}^m$.

Известно [8], что при достаточно гладких ограниченных u, w_0 ограниченное решение задачи Коши существует и единственно в $C^{2,1}(H)$. Заметим, что решение интегро-дифференциального уравнения (4) в этом пространстве также существует, единственно и совпадает в силу свойств потенциалов [5] с решением задачи Коши.

Воспользуемся интегральным представлением (4) для построения численного стохастического алгоритма. Пусть поле скоростей $u(x,t)$ несжимаемо, то есть $\operatorname{div} u(x,t) = 0$. Предполагая, что $w \in C^{1,0}(H)$, применим к $K^{(0)}w(x,t)$ формулу Остроградского. В результате получаем интегральное уравнение для w, равносильное (4):

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \int_0^t dt' \int_G dx' [u\cdot\nabla] Z(x-x',t-t') w(x',t') \\ &\quad + \int_G dx' Z(x-x',t) w_0(x') \\ &\equiv Kw(x,t) + F_0(x,t). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь K – интегральный оператор с ядром

$$\begin{aligned} k(x,t;x',t') = \frac{2}{\pi^{m/2}} \cdot \frac{1}{(4\nu(t-t'))^{m/2+1}} \\ \times \exp\left(-\frac{|x-x'|^2}{4\nu(t-t')}\right) \cdot \Big[u(x',t') \cdot (x-x')\Big]. \end{aligned} \tag{6}$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется

Lemma 1. *(См., например,* [8], [11], [14]*). Пусть ядро k интегрального оператора K, действующего в $L_\infty(H)$, принадлежит классу $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}$, и слабо полярно: то есть $\delta = (\beta - 2\alpha + 2)/2 > 0$ и $m + \beta > 0$.*

Тогда, ряд Неймана для интегрального уравнения Вольтерра $w = Kw + f$ сходится и

$$|Kf(x,t)| \leq \ A\ B(a+1,\delta)\ C_f\ t^{a+\delta}. \tag{7}$$

Здесь $|f(x,t)| \leq C_f\ t^a$, $\ a > -1$, A – константа, B – бета-функция.

Theorem 1.
1) Пусть
a) функции $u_j(x,t), j = 1,\ldots,m$ и $w_0(x)$ ограничены почти всюду.

Тогда ряд Неймана для уравнения (5) *сходится в $C(H)$.*

2) Пусть кроме того
b) $w_0(x)$ непрерывна;
c) $u_j(x,t) \in C^{1,0}(H)$, $j = 1,\ldots,m$ и $\mathrm{div} u = 0$.

Тогда сумма ряда Неймана для (5) *является решением (классическим) задачи Коши* (2) *для уравнения* (1).

Доказательство. Для доказательства сходимости ряда Неймана достаточно заметить, что ядро **(6)** интегрального оператора для почти всех $\boldsymbol{(x',t')} \in \boldsymbol{H}$ принадлежит классу $\boldsymbol{\mathcal{K}_{1,1}}$ и слабо полярно, так как для него $\boldsymbol{\delta = 1/2}$. Правая часть уравнения в силу свойств тепловых потенциалов [16] непрерывна и ограничена: $\boldsymbol{|F_0(x,t)| \leq \|w_0\|_{L_\infty}}$. Сходимость в результате есть прямое следствие утверждения леммы, а непрерывность суммы ряда вытекает из равномерного характера этой сходимости.

В условиях теоремы ограниченное решение задачи Коши **(1)**, **(2)** существует и единственно [8]. Оно удовлетворяет **(4)** и, следовательно, уравнению **(5)**. В силу свойств потенциалов сумма ряда Неймана удовлетворяет начальным условиям и, в силу единственности решения **(5)** в классе ограниченных функций, совпадает с решением задачи Коши. □

Corollary 1. *

Пусть
1) функции $u_j(x,t), j = 1,\ldots,m$ и $w_0(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 в $G \times (0,T]$ и G (ограниченной или неограниченной) соответственно;
2) граница области Γ принадлежит классу $L_1(B,\lambda)$ ляпуновских поверхностей [6]*, и для почти всех $y \in \Gamma$ $n(y) \cdot u(y,t) = 0$.*

Тогда решение задачи Коши (2) *для уравнения* (1) *в области $G \times (0,T]$ может быть найдено в виде суммы ряда Неймана для* (5).

3. Оценка решения задачи Коши

Очевидно, что сходимость ряда Неймана для (5) сохраняется и при замене ядра и свободного члена на их модули. Отсюда следует [3], что возможно построение несмещённой монте-карловской оценки для w на основе моделирования подходящей марковской цепи.

Расширим область определения функций, заданных на H, на всё пространство $X = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, продолжая их нулём на $\mathbb{R}^m \times (-\infty, 0)$ и сохраняя для них те же обозначения.

Для построения сопряжённой оценки решения интегрального уравнения (5) в заданной точке $(x,t) \in H$ необходимо определить марковскую цепь $\{(x_n, t_n), n = 0, 1, \ldots\}$ с переходной плотностью $p(x, t \to x', t')$, согласованной с ядром $k(x, t; x't')$. Из (6) следует, что в качестве переходной плотности естественно выбрать

$$\begin{aligned} p(x, t \to x', t') = q\, \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\nu^{1/2}\pi^{m/2}} \cdot \frac{1}{t^{1/2}\left(4\nu(t-t')\right)^{m/2+1}} \\ \times \exp\left(-\frac{|x-x'|^2}{4\nu(t-t')}\right) \cdot |x-x'|, \end{aligned} \tag{8}$$

при $t > t' > 0$, где q – вероятность выживания на переходе от (x,t) к (x', t') при условии, что $x' \notin G_0$.

Положим $(x_0, t_0) = (x, t)$. При известной (x_n, t_n) следующая точка марковской цепи моделируется в соответствии с факторизованной переходной плотностью $p(x_n, t_n \to x_{n+1}, t_{n+1})$:

$$x_{n+1} = x_n + r_n\, \omega_{\phi,n}, \quad r_n = \left(4\nu(t_n - t_{n+1})\, s_n\right)^{1/2}. \tag{9}$$

При этом направление $\omega_{\phi,n}$ выбирается изотропно, время

$$t_{n+1} = (1-\alpha^2)t_n \tag{10}$$

в соответствии с плотностью $0.5\, t_n^{-1/2}(t_n - t_{n+1})^{-1/2}$, а s_n – как $\gamma(\frac{m+1}{2})$-распределённая на $[0, +\infty)$ случайная величина. Здесь α равномерно распределена в $(0,1)$. Считаем, что t_{n+1}, $\omega_{\phi,n}$ и s_n взаимно независимы.

Цепь обрывается после N шагов, если $x_{N+1} \in G_0$, или, если это не так, с условной вероятностью $1-q$.

Положим

$$\xi^*(x,t) \;=\; \sum_{n=0}^{N} Q_n^*\, F_0(x_n, t_n), \tag{11}$$

где

$$Q_0^* = 1, \quad Q_{n+1}^* == Q_n^* \cdot 2\left(\frac{t_n}{\nu}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})}\left[-u(x_{n+1}, t_{n+1}) \cdot \omega_{\phi,n}\right] \frac{1}{q}, \tag{12}$$

Theorem 2. *В условиях теоремы 1 случайная величина, определённая соотношением* (11)*, является несмещённой оценкой с конечной дисперсией для решения задачи Коши* (1)*,* (2)*.*

Доказательство. Вследствие сходимости ряда Неймана для мажорирующего уравнения и ограниченности весовых множителей

$$\frac{\boldsymbol{k(x_{n-1},t_{n-1};x_n,t_n)}}{\boldsymbol{p(x_{n-1},t_{n-1}\to x_n,t_n)}} \le \mathbf{2}||\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L_\infty(H)}}\left(\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{\nu}}\right)^{\mathbf{1/2}}\frac{\boldsymbol{\Gamma(\frac{m+1}{2})}}{\boldsymbol{\Gamma(\frac{m}{2})}}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}} \equiv \boldsymbol{C_{k,p}}, \tag{13}$$

оценка **(11)** при $\boldsymbol{q > 0}$ есть несмещённая оценка для решения уравнения **(5)** [3], [12] и, в силу теоремы 1, для решения задачи Коши.

Осталось доказать конечность дисперсии. Для этого достаточно показать, что сходится ряд Неймана для уравнения

$$\boldsymbol{\chi = K_p\chi + F_0(2w - F_0)}, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{K_p}$ – интегральный оператор с ядром $\boldsymbol{k^2/p}$ [3]. Из **(13)** следует, что

$$\left|\frac{\boldsymbol{k^2(x,t;x't')}}{\boldsymbol{p(x,t\to x',t')}}\right| \le \boldsymbol{C_{k,p}|k(x,t;x't')|},$$

то есть ядро $\boldsymbol{k^2/p}$ также слабо полярно. Свободный член **(14)** ограничен. Следовательно, ряд Неймана для уравнения **(14)** сходится. □

4. Первая краевая задача

Рассмотрим краевую задачу (1), (2), (3) в исходной постановке. Полагая, что g – непрерывная функция, согласованная с начальными данными, а Γ – достаточно гладкая поверхность, решение задачи будем искать в виде суммы тепловых потенциалов

$$\begin{aligned} w(x,t) = &\int_0^t dt' \int_G dx' Z(x-x',t-t')[-u\cdot\nabla]w(x',t') \\ &+ \int_0^t dt' \int_\Gamma d\sigma(y') 2\frac{\partial Z}{\partial n(y)}(x-y',t-t')\mu(y',t') \\ &+ \int_G dx' Z(x-x',t)w_0(x'), \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $n(y')$ – нормаль к Γ в точке y', направленная в G_0. Пусть $\mathrm{div}u(x,t) = 0$. Тогда, применив к (15) формулу Остроградского, получим:

$$w = Kw + \overline{K}\mu + F, \tag{16}$$

где интегральный оператор K определён соотношениями (5), (6), а оператор $\overline{K}$ с ядром

$$\overline{k}(x,t;y',t') = \frac{|x-y'|\cdot\cos\varphi_{y'x}}{(4\pi)^{m/2}(\nu(t-t'))^{m/2+1}}\exp\left(-\frac{|x-y'|^2}{4\nu(t-t')}\right) \tag{17}$$

переводит $L_\infty(S)$, $S\equiv\Gamma\times(0,T]$, в $C^\infty(H)$. Здесь
$\varphi_{y'x} = \angle(n(y'),x-y')$,

$$F(x,t) = F_0(x,t) - \int_0^t dt' \int_\Gamma d\sigma(y) Z(x-y,t-t')[n(y)\cdot u(y,t')]g(y,t'),$$

$$|\overline{K}\mu(x,t)| \le A_0\ ||\mu||_{L_\infty(S)}. \tag{18}$$

Для того чтобы получить ещё одно интегральное уравнение для неизвестной функции μ, достаточно перейти в соотношении (16) к пределу при $x \to y \in \Gamma$ и воспользоваться известными свойствами теплового потенциала двойного слоя. В результате имеем

$$\mu = K^b w + \overline{K}^b \mu + F^b - g, \tag{19}$$

где K^b – интегральный оператор с ядром $k(y,t;x',t')$, определённым в (6), действующий из $L_\infty(H)$ в $C(S)$, $\overline{K}^b$ – интегральный оператор с ядром $\overline{k}(y,t;y',t')$, действующий из $L_\infty(S)$ в $C(S)$, F^b – граничное значение функции F.

Theorem 3.

1) Пусть

a) $u_j \in L_\infty(H), j = 1,\dots,m,\ w_0 \in L_\infty(G),\ g \in L_\infty(S)$*;*

b) граница области Γ *– ляпуновская из класса* $L_1(B,\lambda)$ *.*

Тогда ряд Неймана для системы уравнений (16), (19) *сходится в пространстве почти всюду ограниченных функций.*

2) Пусть

c) $u_j(x,t), j = 1,\dots,m$ *непрерывно дифференцируемы по* x*, непрерывны и ограничены в* $\overline{H}$*,* $\quad \mathrm{div} u = 0$*;*

d) $w_0(x)$ *непрерывна и ограничена в* $\overline{G}$*;*

e) $g(y,t)$ *непрерывна и ограничена в* $\overline{S}$*.*

Тогда первая компонента суммы ряда Неймана даёт решение краевой задачи (1), (2), (3).

Доказательство. Доказательство сходимости основано на слабой полярности ядер интегральных операторов, входящих в систему **(16)**, **(19)**.

При выполнении условий a), b) ядра операторов $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K^b}$ почти всюду принадлежат классу $\boldsymbol{K_{1,1}}$, то есть слабо полярны в $\mathbb{R}^m$ с параметром $\boldsymbol{\delta_1 = 1/2}$. Ядро оператора $\overline{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{b}}$ на ляпуновской поверхности класса $\boldsymbol{L_1(B,\lambda)}$ принадлежит классу $\boldsymbol{K_{1,1+\lambda}}$ и, следовательно, слабо полярно на поверхности $\boldsymbol{\Gamma}$ с параметром $\boldsymbol{\delta_2 = \lambda/2}$ [14]. Что касается оператора $\overline{\boldsymbol{K}}$, то его ядро определено на $\boldsymbol{H \times S}$ и не является слабо полярным на $\boldsymbol{\Gamma}$.

Перепишем систему **(16)**, **(19)** в матрично-интегральном виде

$$\boldsymbol{W = \mathcal{K}W + \overline{F},} \tag{20}$$

где $\boldsymbol{W = (w,\mu)^T}$,

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K} & \overline{\boldsymbol{K}} \\ \boldsymbol{K^b} & \overline{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix}.$$

В условиях первой части теоремы для почти всех $\boldsymbol{(x,t) \in H}$ $\boldsymbol{|\overline{F}_i| \le C_f,\ i = 1,2}$. Предположим, не ограничивая общности, что $\boldsymbol{t < 1}$. В силу слабой полярности ядер интегральных операторов $\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{K^b},\ \overline{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{b}}$ и ограниченности оператора $\boldsymbol{K^b}$ для компонент векторов $\boldsymbol{\mathcal{K}^j \overline{F}}$ можно записать

$$|[\mathcal{K}\overline{F}]_1(x,t)| \le C_f\ 2A\ B(1,\delta_1) \equiv v_1^{(1)},$$
$$|[\mathcal{K}\overline{F}]_2(y,t)| \le C_f\ 2A\ B(1,\delta_2)\ t^{\delta_2} \equiv v_2^{(1)},$$

$$|[\mathcal{K}^2\overline{F}]_1(x,t)| \le C_f\ (2A)^2\ B(1,\delta_1)\ B(1,\delta_2)\ t^{\delta_2} \equiv v_1^{(2)},$$
$$|[\mathcal{K}^2\overline{F}]_2(y,t)| \le C_f\ (2A)^2\ B(1,\delta_1)\ B(1,\delta_2)\ t^{\delta_1} \equiv v_2^{(2)},$$
$$|[\mathcal{K}^3\overline{F}]_1(x,t)| \le C_f\ (2A)^3\ B(1,\delta_1)\ (B(1,\delta_2))^2\ t^{\delta_1} \equiv v_1^{(3)},$$
$$|[\mathcal{K}^3\overline{F}]_2(y,t)| \le C_f\ (2A)^3\ (B(1,\delta_2))^2\ B(1+\delta_1,\delta_2)\ t^{\delta_1+\delta_2} \equiv v_2^{(3)},$$
$$\ldots$$

Здесь $A = \max\{A(K), A(\overline{K}^b), A_0\}$.

В результате получаем оценку

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}[\mathcal{K}^j\overline{F}]_i\right| \le |\overline{F}_i| + \sum_{j=1}^{\infty} v_i^{(j)} \qquad (21)$$

При этом

$$\begin{aligned} &\frac{v_1^{(2j+1)}}{v_1^{(2j-1)}} \le A_\delta\ B(1+(j-1)\delta_2,\delta_2),\\ &\frac{v_2^{(2j+1)}}{v_2^{(2j-1)}} \le A_\delta\ B(1+j\delta_2,\delta_2),\\ &\frac{v_i^{(2j+2)}}{v_i^{(2j)}} \le A_\delta\ B(1+j\delta_2,\delta_2), \quad i=1,2,\ j=1,2,\ldots, \end{aligned} \qquad (22)$$

где $A_\delta = 4A^2B(1,\delta_2)\,t^{\delta_1}$. Правые части в неравенствах (22) стремятся к нулю при $j\to\infty$ в силу асимптотических свойств бета-функции. Отсюда следует, что ряд в правой части (21) сходится, а, значит, сходится и ряд Неймана для оператора $\mathcal{K}$.

Для доказательства второй части теоремы заметим, во-первых, что в её условиях решение краевой задачи существует и единственно [8]. Обозначим $(\tilde{w},\tilde{\mu})^T$ сумму ряда Неймана для (16), (19). В силу условий теоремы поверхностный потенциал с плотностью w_0 и потенциал простого слоя с непрерывной плотностью $(u\cdot n)g$ бесконечно дифференцируемы. Потенциал двойного слоя с непрерывной плотностью $\tilde{\mu}$ также бесконечно дифференцируем. Отсюда следует, что в силу равномерной сходимости ряда $\tilde{w}\in C^{2,1}(H)$, несмотря на то, что непосредственное дифференцирование представления (16) неправомерно. $\tilde{w}$ удовлетворяет (16), а, следовательно, (15) и исходному дифференциальному уравнению. Выполнение граничных условий (3) с очевидностью следует из системы (16), (19) и свойств поверхностных потенциалов. В силу единственности $\tilde{w}$ совпадает с решением краевой задачи. □

5. Оценка решения краевой задачи

Сходимость ряда Неймана очевидно сохраняется и для системы, мажорирующей (22). Заметим, однако, что компоненты вектор-функции W находятся в различных пространствах и поэтому непосредственное применение теории весовых векторных оценок метода Монте-Карло здесь невозможно.

Одним из путей преодоления этого затруднения является построение скалярной сопряжённой оценки на основе моделирования ветвящейся марковской цепи. Продолжим функции, заданные на H, на всё X, а функции, заданные на S, – на $Y=\Gamma\times\mathbb{R}$, полагая их равными нулю при $t<0$ и при

$x \in G_0$. Пусть необходимо вычислить значение функции $w(x,t)$ в заданной точке (x_0,t_0). Обозначим $\xi^*[w](x,t)$ и $\xi^*[\mu](y,t)$ – несмещённые оценки для $w(x,t)$ и $\mu(y,t)$ соответственно. Рандомизация интегральных уравнений (16), (19) приводит к рекуррентным соотношениям, позволяющим вычислять выборочные значения этих оценок в процессе построения ветвящейся марковской цепи. Ядра интегральных операторов K, K^b, как показано в п.3, согласованы с переходной плотностью (8), а ядра операторов $\overline{K}$, $\overline{K}^b$ – с переходной плотностью B-процесса нестационарного случайного блуждания по границе [14]:

$$\overline{p}(x,t \to y',t') = \frac{\nu|x-y'|\,|\cos\varphi_{y'x}|}{(4\pi)^{m/2}(\nu(t-t'))^{m/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-y'|^2}{4\nu(t-t')}\right) q\,. \tag{23}$$

Таким образом, если определена точка марковской цепи $(x_n,t_n) \in X$, то значение оценки для w определяется из соотношения

$$\begin{aligned}\xi^*[w](x_n,t_n) = \chi_G(x_{n+1})\, 2\left(\frac{t_n}{\nu}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \\ \times\big[-u(x_{n+1},t_{n+1})\cdot\omega_{\phi,n}\big]\,\frac{a}{q}\xi^*[w](x_{n+1},t_{n+1}) \\ +\sum_{j=1}^{2k}\chi_\Gamma^j\,\frac{b}{\nu q'}\,\mathrm{sign}\left(\cos\varphi_{y^j_{n+1}x_n}\right)\xi^*[\mu](y^j_{n+1},t^j_{n+1}) + F(x_n,t_n).\end{aligned} \tag{24}$$

Здесь (x_{n+1},t_{n+1}) моделируется в соответствии с (9), (10), $y^j_{n+1} = x_n + r^j_n\omega$, где r^j_n определяются из условия пересечения прямой с изотропным направлением ω с границей Γ, $2k \geq 0$ – число этих пересечений (чётное с вероятностью 1),

$$t^j_{n+1} = t_n - \frac{(r^j_n)^2}{4\nu s^j_n}\,, \tag{25}$$

s^j_n – $\gamma(\frac{m}{2})$-распределённая случайная величина. Случайные величины a и b равны единице с вероятностями q и q' соответственно и нулю с дополнительными вероятностями, а индикаторные функции χ_G и $\chi^j_\Gamma = 1$ при $k > 0$ и $t^j_{n+1} > 0$ определяют геометрические условия обрыва марковской цепи.

Заметим, что моделирование точек на Γ в соответствии с плотностью (23) отличается от классического случайного блуждания по границе тем, что в построении участвуют все пересечения изотропного направления с поверхностью. Впервые такая модификация была предложена без обоснования в [9]. Точное выражение оценки решения первой краевой задачи, построенной с использованием ветвящегося блуждания по границе, выписано в [15].

Lemma 2. *Среднее число точек нестационарного ветвящегося случайного блуждания по границе равно*

$$\mathbb{E}n = \int_0^t dt_0 \int_\Gamma d\sigma(y_0) m(y_0,t_0) p_0(y_0,t_0),$$

где m – решение интегрального уравнения

$$m(y,t) = \int_0^t dt' \int_\Gamma d\sigma(y')\overline{p}(y,t\to y',t')m(y',t') + 1, \tag{26}$$

p_0 – плотность распределения начальной точки цепи.

Доказательство (в полной аналогии с леммой 1.1.1 из [4]) с очевидностью следует из марковских свойств случайного блуждания по границе. При этом существование решения интегрального уравнения (26) вытекает из слабой полярности ядра $\overline{p}$.

Рандомизация интегрального уравнения (19) позволяет выписать рекуррентное соотношение, определяющее оценку и для μ. Пусть известна точка марковской цепи $(y_n, t_n) \in Y$, тогда значение оценки вычисляется из соотношения

$$\begin{aligned} \xi^*[\mu](y_n, t_n) = \chi_G(x_{n+1})\, 2 \left(\frac{t_n}{\nu}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} & \\ \times \big[-u(x_{n+1}, t_{n+1}) \cdot \omega_{\phi,n} \big]\ \frac{a}{q} \xi^*[w](x_{n+1}, t_{n+1}) & \\ + \sum_{j=1}^{2k-1} \chi_\Gamma^j\ \frac{b}{\nu q'}\ \mathrm{sign}\left(\cos\varphi_{y^j_{n+1} y_n}\right) \xi^*[\mu](y^j_{n+1}, t^j_{n+1}) & \\ + F(y_n, t_n) - g(y_n, t_n). & \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь (x_{n+1}, t_{n+1}) выбирается в соответствии с моделирующими формулами (9), (10), в которые вместо x_n следует подставить y_n. Точки (y^j_{n+1}, t^j_{n+1}) моделируются в соответствии с плотностью (23), то есть равномерно по телесному углу выбирается случайное направление прямой, проходящей через y_n, точки пересечения которой с Γ участвуют в построении оценки. Число их с вероятностью единица нечётно. Заметим, что для выпуклой границы $k = 1$. Переход по времени здесь также моделируется с использованием $\gamma(\frac{m}{2})$-распределённых случайных величин и осуществляется в соответствии с формулой (25).

Theorem 4. *Случайная величина* $\xi^*[w](x,t)$*, определённая на ветвящейся марковской цепи с помощью рекуррентных соотношений* (24), (27)*, является несмещённой оценкой с конечной дисперсией для решения* $w(x,t)$ *краевой задачи* (1)–(3).

Доказательство. Для доказательства несмещённости нам достаточно показать, что, во-первых, математическое ожидание вектора $\boldsymbol{\xi^* = (\xi^*[w](x_0, t_0), \xi^*[\mu](y_1, t_1))^T}$ конечно и удовлетворяет матрично-интегральному уравнению **(20)**, и, во-вторых, что среднее число точек траектории марковской ветвящейся цепи ограничено.

В условиях реализуемости построенной оценки из ограниченности весовых множителей следует правомерность применения оператора математического ожидания $\mathbb{E}$ к рекуррентным соотношениям **(24)**, **(27)** [12]. В результате получаем, что $\boldsymbol{\mathbb{E}\xi^*}$ удовлетворяет **(20)** и, в силу единственности ограниченного решения, совпадает с решением краевой задачи.

Определим теперь достаточные условия конечности $\boldsymbol{n^{(G)}(x,t)}$ и $\boldsymbol{n^{(\Gamma)}(x,t)}$ – среднего числа точек ветвящейся марковской цепи, начинающейся в точке $\boldsymbol{(x,t) \in X}$, в $\boldsymbol{G}$ и на $\boldsymbol{\Gamma}$ соответственно. Из марковских свойств построенного случайного блуждания вытекает, что эти функции удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\boldsymbol{n^{(G)} = P n^{(G)} + P^b n^{(\Gamma)} + 1, \quad n^{(\Gamma)} = \overline{P} n^{(G)} + \overline{P}^b n^{(\Gamma)}.} \tag{28}$$

Здесь ядро $\boldsymbol{p}$ интегральных операторов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{P^b}$ и ядро $\boldsymbol{\overline{p}}$ интегральных операторов $\boldsymbol{\overline{P}}$, $\boldsymbol{\overline{P}^b}$ обладают теми же свойствами, что и ядра $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{\overline{k}}$ соответствующих операторов системы **(16)**, **(21)**. Отсюда в полной аналогии с доказательством теоремы 3 вытекает, что ряд Неймана для **(28)** сходится. Это означает, что среднее число точек цепи ограничено и оценка реализуема.

Покажем теперь конечность дисперсии построенной оценки или, что равносильно, конечность вторых моментов $s[w] = \mathbb{E}(\xi^*[w])^2$ и $s[\mu] = \mathbb{E}(\xi^*[\mu])^2$. В силу уже доказанного для этого достаточно показать, что сходится ряд Неймана для системы интегральных уравнений, которой они удовлетворяют. Из (24), (27) следует

$$
\begin{aligned}
s[w] &= K_p s[w] + \overline{K}_{\overline{p}} s[\mu] + F_s[w], \\
s[\mu] &= K_p^b s[w] + \overline{K}_{\overline{p}}^b s[\mu] + F_s[\mu],
\end{aligned}
\tag{29}
$$

где

$$
\begin{aligned}
F_s[w] &= \overline{K}_\phi \mu - \overline{K}_{\overline{p}} \mu^2 + 2Kw \cdot \overline{K}\mu + F(2w - F), \\
F_s[\mu] &= \overline{K}_\phi^b \mu - \overline{K}_{\overline{p}}^b \mu^2 + 2K^b w \cdot \overline{K}^b \mu + (F^b - g)(2\mu - F^b + g).
\end{aligned}
$$

Здесь $t^j = t - |x - y^j|^2/4\nu s$,

$$
\overline{K}_\phi \mu(x,t) = \int_0^{+\infty} ds \oint d\phi \frac{1}{2\pi^{m/2}\nu^2 q} \exp(-s) s^{\frac{m}{2}-1} \left(\sum_{j=1}^{2k(\phi)} \chi_\Gamma^j \operatorname{sign}\left(\cos\varphi_{y^j x}\right) \mu(y^j, t^j) \right)^2,
$$

а сумма под интегралом равна нулю, если прямая, проходящая через x и определяемая телесным углом ϕ, не пересекает Γ. Функция $\overline{K}_\phi^b \mu(y,t)$ определяется аналогично.

Рассмотрим ядра интегральных операторов, входящих в систему (29). Имеем

$$
\begin{aligned}
k_p(x,t;x',t') &= \frac{k^2}{p}(x,t;x',t') = |k| \chi_G(x') \frac{2}{q} \left(\frac{t}{\nu}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} |u(x',t') \cdot \omega_\phi| \, \frac{a}{q} \\
\overline{k}_{\overline{p}}(x,t;y',t') &= \frac{\overline{k}^2}{\overline{p}}(x,t;y',t') = |\overline{k}| \chi_S(y',t') \frac{1}{\nu q}.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что в условиях теоремы ядра операторов K_p и K_p^b принадлежат тому же классу $K_{1,1}$, что и ядро оператора K, то есть слабо полярны с параметром $\delta_1 = 1/2$. Ядро оператора $\overline{K}_{\overline{p}}^b$ принадлежит классу $K_{1,1+\lambda}$ и слабо полярно на Γ с параметром $\delta_2 = \lambda/2$. Оператор $\overline{K}_{\overline{p}}$ ограничен. В полной аналогии с доказательством теоремы 3 получаем, что ряд Неймана для системы (29) сходится к ограниченному решению $(s[w], s[\mu])^T$, которое определяет конечную дисперсию построенной оценки. □

Remark 1. При построении оценок неявно предполагалось, что функции F_0 и F точно известны. В действительности же аналитическое вычисление интегралов, которыми они выражаются, не представляется возможным. Заметим, однако, что в силу принципа двойной рандомизации [3] вместо самих F_0, F можно использовать их несмещённые оценки.

□

6. Граничное значение, зависящее от решения

В предыдущей части работы описано построение стохастических алгоритмов решения первой краевой задачи (1), (2), (3). При этом предполагалось, что функция g задана в явном виде.

Существуют, однако, такие задачи, в которых граничное значение представляет собой функционал от решения внутри области. Например, в методе случайных вихрей [1] для уравнений Навье-Стокса физически обоснованные краевые условия, лежащие в основании механизма зарождения вихрей на поверхности, таковы, что граничные значения w пропорциональны касательной компоненте скорости, которая равна сумме безвихревой составляющей и интеграла типа потенциала от завихренности. Эти рассуждения привели к необходимости исследовать возможность построения монте-карловского алгоритма для решения первой краевой задачи с граничной функцией следующего вида:

$$g(y,t) = \int\limits_G dx \frac{f(y,x)}{|y-x|^{m-1}} w(x,t) + g_0(y,t) \equiv K_f w + g_0, \tag{30}$$

где $f(y,x)$ – почти всюду ограниченная в $\Gamma \times G$, а $g_0(y,t)$ – непрерывная и ограниченная в S.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$w_t = \nu \Delta w,$$

исключая тем самым влияние конвективного члена, положим равной нулю $w_0(x)$ и будем искать решение в виде теплового потенциала двойного слоя:

$$w(x,t) = \overline{K}\mu(x,t). \tag{31}$$

Соотношение на разрыв потенциала $\overline{K}$ на границе и краевое условие (3) с учётом (30), (31) позволяют выписать интегральное уравнение, которому удовлетворяет неизвестная плотность μ:

$$\mu = (\overline{K}^b - K_f \overline{K})\mu - g_0. \tag{32}$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится

Lemma 3. *Для любых точек $y,\ y' \in \Gamma,\ y \neq y'$ и постоянных $0 < a < m,\ 0 < b < m$, таких, что $a + b > m$, верно следующее неравенство*

$$\int\limits_G dx \frac{1}{|x-y|^a} \frac{1}{|x-y'|^b} \le C_m |y-y'|^{m-a-b},$$

где C_m – некоторая постоянная.

Для доказательства достаточно разбить область интегрирования на четыре части и оценить каждый интеграл в отдельности.

Theorem 5. *Пусть $\Gamma \in L_1(B,\lambda)$. Тогда ряд Неймана для интегрального уравнения* (32) *сходится в $C(S)$.*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим интегральный оператор уравнения. Ядро оператора $\boldsymbol{\overline{K}^b}$, как известно [14], принадлежит классу $\boldsymbol{K_{1,1+\lambda}}$. Следовательно, оно слабо полярно с параметром $\boldsymbol{\delta = \lambda/2}$ и для него выполняется неравенство **(7)**.

Ядро оператора $\boldsymbol{K_f \overline{K}}$ не принадлежит ни одному из введённых классов. Имеем, однако,

$$\left|\boldsymbol{K_f\overline{K}\mu(y,t)}\right| \le \sup|f|\cdot||\mu||_{L_\infty}\int\limits_G dx\int\limits_0^t dt'\int\limits_\Gamma d\sigma(y')\frac{4}{(4\nu)^\beta\pi^{m/2}}\cdot s^{\frac{m}{2}-\beta+1}\exp(-s)$$
$$\times|x-y'|^{-(m+1-2\beta)}|x-y|^{-(m-1)}|t-t'|^{-\beta},$$

где обозначено $s=|x-y'|^2/4\nu(t-t')$, а $\beta>0$ – некоторая константа. Отсюда, в силу результата леммы 3, следует, что при $1>\beta>1/2$

$$\left|K_f\overline{K}\mu(y,t)\right|\le C_w t^{1-\beta}B(1,1-\beta)||\mu||_{L_\infty}, \tag{33}$$

где C_w – некоторая постоянная. Таким образом, оператор $K_f\overline{K}$ также слабо полярный, и, следовательно, в полной аналогии с доказательством леммы 4.3 [14] последовательное применение неравенств **(7)**, **(33)** позволяет оценить итерации интегрального оператора $\overline{K}^b - K_f\overline{K}$ членами сходящегося ряда, что и доказывает сходимость ряда Неймана для **(32)**. Непрерывность μ следует из равномерного характера этой сходимости. □

Очевидно, что сходимость ряда сохраняется и для мажорирующего (32) интегрального уравнения. Отсюда следует возможность построения несмещённой оценки для решения краевой задачи (3), (30) для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим (31) как интегральный функционал от решения интегрального уравнения (32). Тогда, в силу принципа двойной рандомизации [3], можно записать

$$w(x,t)=\mathbb{E}\xi^*[w](x,t),$$

где

$$\xi^*[w](x,t)=\sum_{j=1}^{2k(x,y_0)}\chi_\Gamma^j\,\mathrm{sign}(\cos\varphi_{y_0^{(j)}x})\;\frac{q_0(x)}{\nu}\cdot\xi[\mu](y_0^{(j)},t_0^{(j)}). \tag{34}$$

Здесь случайные точки $(y_0^{(j)},t_0^{(j)})$, $j=1,\ldots,2k(x,y_0)$ распределены в S с плотностью

$$\begin{aligned}p_0(x,t;y_0,t_0)&=\left[\frac{2|\cos\varphi_{y_0x}|}{q_0(x)\sigma_m|x-y_0|^{m-1}}\right]\\ &\times\left[\frac{4\nu|x-y_0|^m}{\Gamma(\frac{m}{2})(4\nu(t-t_0))^{m/2+1}}\cdot\exp\left(-\frac{|x-y_0|^2}{4\nu(t-t_0)}\right)\right],\end{aligned} \tag{35}$$

согласованной с ядром интегрального оператора $\overline{K}$. Это соответствует равномерному по телесному углу выбору случайного направления прямой, проходящей через точку x и с вероятностью $q_0(x)\le 1$ пересекающей Γ. (См. [15]). Выбор происходит до первого успеха. Далее при уже определённых $y_0^{(j)}$ начальные значения времени определяются по обычной формуле $t_0^{(j)}=t-|x-y_0^{(j)}|^2/4\nu s^{(j)}$, где $s^{(j)}$ – выборочные значения $\gamma(\frac{m}{2})$-распределённой случайной величины. Вместо точного значения q_0 можно использовать её несмещённую оценку N/N_0, где N – общее число монте-карловских испытаний (построенных траекторий), а N_0 – общее число смоделированных случайных направлений.

Определим теперь оценку для $\mu(y_0,t_0)$. Рандомизация интегрального уравнения (32) позволяет выписать рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned}\xi[\mu](y_i,t_i) = &\sum_{j=1}^{2k(y_i,y_{i+1})-1} \chi_\Gamma^j \,\mathrm{sign}(\cos\varphi_{y_{i+1}^{(j)}y_i})\, \frac{a}{\nu q}\cdot \xi[\mu](y_{i+1}^{(j)},t_{i+1}^{(j)}) \\ &- \sum_{j=-1}^{-2k(x_{i+1},y_{i+1})} \chi_\Gamma^j\, Q_i^{(j)}\, \frac{b}{q'}\cdot \xi[\mu](y_{i+1}^{(j)},t_{i+1}^{(j)}) - g_0(y_i,t_i).\end{aligned} \tag{36}$$

Здесь точки $(y_{i+1}^{(j)},t_{i+1}^{(j)})$ при $j>0$ моделируются в соответствии с переходной плотностью (23). Что касается рандомизированного вычисления $K_f\overline{K}\mu$, то здесь необходимо учитывать особенности подинтегрального выражения при $x\to\Gamma$ и при $|x|\to\infty$. Для этого моделируется вспомогательная точка x_{i+1}, которая с некоторой положительной вероятностью $p^{(x)}$ выбирается в шаре G_1 некоторого радиуса d_0 с центром в точке y_i, а с вероятностью $1-p^{(x)}$ – во внешности этого шара G_2. Полагаем, что $G_0\subset G_1$ и, если $x_{i+1}\in G_0$, то эта ветвь марковской цепи обрывается.

Пусть $x_{i+1}\in G_1$. Тогда точки $(y_{i+1}^{(j)},t_{i+1}^{(j)})$, $j<0$ выбираются в соответствии с плотностью $p(y_{i+1},t_{i+1}|x_{i+1}) = p_0(x_{i+1},t_i;y_{i+1},t_{i+1})$ из (35), где $q_0=1$. Это означает, что выбор случайного направления происходит только один раз, а $2k(x_{i+1},y_{i+1})\ge 0$ есть число пересечений с границей области. Весовые множители в этом случае имеют вид:

$$Q_i^{(j)} = \frac{\sigma_m d_0}{p^{(x)}\nu}\, f(y_i,x_{i+1})\,\mathrm{sign}(\cos\varphi_{y_{i+1}^{(j)}x_{i+1}}),$$

а переходная плотность

$$\begin{aligned}&p_1(y_i,t_i\to y_{i+1},t_{i+1})\\ &\quad= p^{(x)}\frac{1}{|x_{i+1}-y_i|^{m-1}}\cdot\frac{1}{\sigma_m d_0}\left[\frac{2|\cos\varphi_{y_{i+1}x_{i+1}}|}{\sigma_m|x_{i+1}-y_{i+1}|^{m-1}}\right]\\ &\quad\times\left[\frac{4\nu|x_{i+1}-y_{i+1}|^m}{\Gamma(\frac{m}{2})(4\nu(t_i-t_{i+1}))^{m/2+1}}\cdot\exp\left(-\frac{|x_{i+1}-y_{i+1}|^2}{4\nu(t_i-t_{i+1})}\right)\right]\, q',\end{aligned}$$

где q' – условная при $k>0$ вероятность выживания данной ветви марковской цепи.

Пусть теперь $x_{i+1}\in G_2$. В этом случае t_{i+1} выбирается на интервале $(0,t_i)$ с плотностью $(1-\beta)\ t_i^{\beta-1}\,(t_i-t_{i+1})^{-\beta}$, а y_{i+1} – по произвольной отделённой от нуля плотности распределения на поверхности Γ. Вторая сумма в (36) в данном случае состоит всего из одного слагаемого, переходная плотность есть

$$\begin{aligned}p_2(y_i,t_i\to y_{i+1},t_{i+1}) = &\frac{1-p^{(x)}}{|x_{i+1}-y_i|^{2m-2\beta}}\cdot\frac{(m-2\beta)\ d_0^{m-2\beta}}{\sigma_m}\\ &\times p_{G_2}(y_{i+1})\ \frac{1-\beta}{t_i^{1-\beta}}\,(t_i-t_{i+1})^{-\beta}\ q',\end{aligned}$$

а весовой множитель

$$\begin{aligned}Q_i^{(j)} = &\frac{1}{1-p^{(x)}}\, f(y_i,x_{i+1})\left(\frac{|y_i-x_{i+1}|}{|y_{i+1}-x_{i+1}|}\right)^{m+1-2\beta}\\ &\times\frac{8d_0^{m-2\beta}t_i^{1-\beta}}{(1-\beta)(m-2\beta)\Gamma(\frac{m}{2})(4\nu)^{\beta}}\cdot\frac{\cos\varphi_{y_{i+1}x_{i+1}}}{p_{G_2}(y)}\ s^{\frac{m}{2}-\beta+1}\exp(-s),\end{aligned}$$

где $s=|y_{i+1}-x_{i+1}|/4\nu(t_i-t_{i+1})$.

Theorem 6. *Случайная величина* $\xi^*[w](x,t)$*, определённая соотношением* (34)*, где* $\xi[\mu]$ *строится на ветвящейся марковской цепи с помощью рекуррентных соотношений* (36)*, является несмещённой оценкой с конечной дисперсией для решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности с граничным условием вида* (30)*.*

Доказательство. Несмещённость построенных оценок вытекает из сходимости ряда Неймана для мажорирующего оператора $(\overline{K}^b - K_f\overline{K})_1$ (см. [3]), что позволяет применить к соотношениям **(36)** оператор $\mathbb{E}$ почленно и прийти к исходному интегральному уравнению, которому будет удовлетворять конечное $\mathbb{E}\xi[\mu]$. Гладкость $\mathbb{E}\xi^*[w]$ следует из свойств потенциала двойного слоя.

Реализуемость оценки, то есть конечность с вероятностью единица числа точек ветвящейся марковской цепи, достигается выбором вероятностей обрыва. Заведомо конечным среднее число точек будет, например, при $q, q' < 1/(4\bar{k} - 1)$, где $2\bar{k}$ – максимально возможное для данной поверхности Γ число пересечений с прямой.

Осталось показать конечность дисперсии построенной оценки $\xi^*[w]$ или, что равносильно, конечность второго момента $s = \mathbb{E}(\xi[\mu])^2$. Из **(36)** следует, что s удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} s = \overline{K}^b_{\overline{p}} s + p^{(x)}(K_f\overline{K})_{p1} s + (1 - p^{(x)})(K_f\overline{K})_{p2} s \\ -\overline{K}^b_{\overline{p}}\mu^2 - p^{(x)}(K_f\overline{K})_{p1}\mu^2 + \overline{K}^b_{\phi}\mu + p^{(x)}(K_f\overline{K})_{\phi}\mu - g_0(2\mu + g_0). \end{aligned} \tag{37}$$

Теперь для доказательства ограниченности s достаточно заметить, что $\overline{k}^2/\overline{p} \le \mathbf{const}|k|$ и, аналогично, $k_f^2/p_1 \le \mathbf{const}|k_f|$, $k_f^2/p_2 \le \mathbf{const}|k_f|$, где k_f – ядро оператора $K_f\overline{K}$. Таким образом, для интегральных операторов $\overline{K}^b_{\overline{p}}$ и $(K_f\overline{K})_{p1}$, $(K_f\overline{K})_{p2}$ верны оценки **(7)** и, соответственно, **(33)**. Следовательно [11], [14], ряд Неймана для уравнения **(37)**, сходится к единственному ограниченному решению. □

Список литературы

[1] A. J. Chorin, Numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech* (1973) **57**, 785–796.

[2] E. O. Djetybaev and K. K. Sabelfeld, Solution of a mixed problem for equations of parabolic and hyperbolic type by Monte Carlo method. *Zh.Vychisl.Matem. i Mat.Phys.* (1984) **24**, No.5, 677–685 (in Russian).

[3] S. M. Ermakov and G. A. Mikhailov, *Statistical Modelling.* Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).

[4] S. M. Ermakov, V. V. Nekrutkin and A. S. Sipin, *Random Processes for Classical Equations of Mathematical Physics.* Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 1989.

[5] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type.* Prentice-Hall, 1964.

[6] N. M. Günter, *Potential Theory and its Application to the Basic Problems of Mathematical Physics.* Gostekhizdat, Moscow, 1953 (in Russian).

[7] A. Haji-Sheikh, E. M. Sparrow, The floating random walk and its application to Monte Carlo solutions of heat equations. *SIAM J. Appl. Math* (1966) **14**, No.2, 570–589.

[8] A. M. Il'in, A. S. Kalashnikov and O. A. Olejnik, Linear second order equations of parabolic type. *Uspekhi Mat. Nauk* (1962) **17**, Issue 3, 3–147 (in Russian).

[9] Yu. N. Kopylov, Branching walk on boundary process for non-convex domains. In: *Theory and Applications of Statistical Modelling*, Computing Center, Novosibirsk (1991), 52–57 (in Russian).

[10] O. Kurbanmuradov, Walk on spheroids for solving heat equation. In: *Theory and Algorithms of Statistical Modelling*, Computing Center, Novosibirsk (1984), 67–77 (in Russian).

[11] O. A. Kurbanmuradov, K. K. Sabelfeld and N. A. Simonov, *Random Walk on Boundary Algorithms.* Computing Center, Novosibirsk, 1989 (in Russian).

[12] G. A. Mikhailov, *New Monte Carlo Methods with Estimating Derivatives.* VSP, Utrecht, 1995.

[13] K. K. Sabelfeld, *Monte Carlo Methods in Boundary Value Problems.* Springer-Ferlag, Berlin – Heidelberg, 1991.

[14] K. K. Sabelfeld and N. A. Simonov, *Random Walks on Boundary for Solving PDEs.* VSP, Utrecht, 1994.

[15] N. A. Simonov, Solution by the Monte Carlo method to first boundary value problem for parabolic equations. *Transactions of Computing Center SB RAS. Comp. Mathematics*, (1995), Issue 3, 1-17 (in Russian).

[16] V. S. Vladimirov, *Mathematical Physics Equations.* Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).