РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ

Н.А. Симонов

Методы Монте–Карло для уравнения диффузии со случайным коэффициентом поглощения

Препринт

1127

ИВМиМГ

Новосибирск 1998

УДК 517.946
ББК В 161.62

Симонов Н.А. Методы Монте–Карло для уравнения диффузии со случайным коэффициентом поглощения. – Новосибирск, 1998. – 17 с. – (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. ИВМиМГ; 1127).

В работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения со случайными коэффициентом поглощения, правой частью и начальными данными. Описываются монте-карловские вычислительные алгоритмы, позволяющие оценивать решение задачи, его конечномерные распределения, различные статистические параметры и функционалы.

Simonov N.A. Monte Carlo methods for the diffusion equation with a random absorption coefficient. – Novosibirsk, 1998. – 17 p. – (Preprint / RAN. Sib. Branch. Inst. of Comp. Math. and Math. Geoph.; 1127).

Cauchy problem for parabolic equation with random absorption coefficient, random right hand part and initial value is considered. Monte Carlo computational algorithms are described. These algorithms make it possible to evaluate the solution, its finite-dimensional distributions, various statistical parameters and functionals.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 97–01–00042 и INTAS, грант ИНТАС–РФФИ 95–726.

Оформлено в системе LaTeX, макрос NCC

Введение

Хорошо известно, что использование традиционных численных методов для решения дифференциальных уравнений в вероятностной постановке не только неэффективно, но и зачастую необоснованно, ибо выборочные функции решения как случайного поля могут быть недифференцируемыми и даже разрывными с вероятностью единица. В такой ситуации можно либо переформулировать задачу, сведя ее с помощью (*обоснованного*!) усреднения к какой-либо эквивалентной детерминированной, либо наложить дополнительные условия, обеспечивающие требуемую гладкость выборочных траекторий.

Одним из возможных подходов, позволяющих решать задачу в исходной вероятностной постановке, является использование вероятностного представления (формулы Фейнмана–Каца) [1] и усреднения в пространстве траекторий диффузионного процесса, порожденного данным уравнением. Известно, однако [2], что наиболее эффективный способ моделирования такого случайного процесса заключается в последовательном построении его траектории достаточно мелкими шагами по времени, что при увеличении точности (уменьшении отклонения ε вычисленного функционала от его точного значения в некоторой норме) приводит к относительно быстрому росту (порядка ε^{-3}) трудоемкости. Заметим, что методы Монте–Карло, описываемые далее, приводят к оценкам с конечной дисперсией и, следовательно, имеют трудоемкость порядка ε^{-2}, так как вероятностная ошибка убывает со скоростью $O(N^{-1/2})$, где N – объем выборки (число моделируемых траекторий). При этом вычислительные алгоритмы, предлагаемые в данной работе, позволяют оценивать как среднее от решения уравнения диффузии со случайными параметрами, так и его конечномерные распределения, различные статистические характеристики и функционалы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в $D \equiv \mathbb{R}^m \times (0,T]$ параболическое уравнение

$$w_t = \nu \Delta w + cw + f, \tag{1.1}$$

коэффициенты которого $c(x,t;\omega)$, $f(x,t;\omega)$ являются случайными функциями, и задачу Коши для него

$$w|_{t=0} = w_0(x;\omega), \qquad x \in \mathbb{R}^m, \tag{1.2}$$

где $w_0(x;\omega)$ также случайна. Полагаем, что ν – положительная константа.

Здесь $\omega \in \Omega$, где $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ – некоторое подходящее вероятностное пространство, T – конечный момент времени. Решение поставленных задач будем понимать в среднеквадратическом (с.к.) смысле. При этом по возможности не будем касаться вопросов его существования и единственности, предполагая, что коэффициенты уравнения и начально-краевые данные обладают всеми необходимыми свойствами.

Заметим, что из принадлежности $w(x,t;\cdot)$ пространству $C^{2,1}(D;\Omega)$ (в с.к. смысле) согласно теореме Колмогорова вытекает, что выборочные функции $w(x,t;\omega)$ будут лежать в пространстве $C^{1,0}(D)$, т.е. потраекторно с.к. решение является обобщенным решением детерминированной (при фиксированном ω) задачи.

По аналогии с детерминированным случаем [3] введем

Определение. Стохастическим фундаментальным решением уравнения (1.1) в слое D назовем функцию $Z(x,t;x',t';\omega)$, которая: а) в области $D \times D$, $0 < t' < t$ удовлетворяет по переменным x,t уравнению (1.1) при $f = 0$ в с.к. смысле; б) для любой с.к. непрерывной функции ϕ с ограниченным в $\mathbb{R}^m$ вторым моментом и любых $x \in \mathbb{R}^m$, $t' \in [0,T)$, выполняется

$$\lim_{t\to t'+0}\int\limits_{\mathbb{R}^m} dx'\, Z(x,t;x',t';\omega)\phi(x';\omega) = \phi(x;\omega)$$

в с.к. смысле.

Обозначим через

$$Z_0(x-x',t-t') = \left(4\pi\nu(t-t')\right)^{-m/2}\exp\left(-\frac{|x-x'|^2}{4\nu(t-t')}\right),\ \ t-t'>0,$$

параметрикс, т.е. фундаментальное решение однородного уравнения теплопроводности.

Утверждение 1. *Пусть коэффициент c непрерывен в с.к. смысле и существует равномерный с.к. предел частичных сумм ряда Неймана для интегрального уравнения*

$$\Phi(y,\tau;x',t';\omega) = \int\limits_{t'}^{\tau} d\tau' \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy' c(y,\tau;\omega)Z_0(y-y',\tau-\tau')\Phi(y',\tau';x',t';\omega) + c(y,\tau;\omega)Z_0(y-x',\tau-t'). \tag{1.3}$$

Тогда

$$Z(x,t;x',t';\omega) = Z_0(x-x',t-t') + \int\limits_{t'}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy\, Z_0(x-y,t-\tau)\Phi(y,\tau;x',t';\omega) \tag{1.4}$$

есть стохастическое фундаментальное решение уравнения (1.1).

Для доказательства достаточно переписать определение в терминах моментных функций второго порядка, из чего непосредственно вытекает, что если Φ удовлетворяет уравнению

(1.3) в с.к. смысле и с.к. непрерывна, то Z удовлетворяет однородному уравнению (1.1) и условию б) определения. Требуемая с.к. непрерывность Φ обеспечивается вольтерровостью интегральных операторов в (1.3), равномерностью сходимости и тем, что свободный член уравнения с.к. непрерывен.

Пусть f, w_0 – с.к. непрерывные случайные функции с ограниченными в $D \times D$ вторыми моментами. Считаем также, что они не зависят от коэффициента c. Тогда в полной аналогии с детерминированным случаем с.к. решение случайной задачи Коши представляется в виде суммы потенциалов

$$w(x,t;\omega) = \int_0^t dt' \int_{\mathbb{R}^m} dx' Z(x,t;x',t';\omega) f(x',t';\omega) + \int_{\mathbb{R}^m} dx' Z(x,t;x',0;\omega) w_0(x';\omega). \tag{1.5}$$

2. Задача Коши

Рассмотрим решение задачи (1.1), (1.2) и будем искать его в виде суммы тепловых потенциалов с параметриксом Z_0 в качестве ядра:

$$\begin{aligned} w(x,t;\omega) = & \int_0^t dt' \int_{\mathbb{R}^m} dx' Z_0(x-x',t-t') c(x',t';\omega) w(x',t';\omega) + \\ & \int_0^t dt' \int_{\mathbb{R}^m} dx' Z_0(x-x',t-t') f(x',t';\omega) + \\ & \int_{\mathbb{R}^m} dx' Z_0(x-x',t) w_0(x';\omega) \\ \equiv & K_{Z_0 c} w(x,t;\omega) + F_0(x,t;\omega). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Рассмотрим интегральный оператор уравнения (1.3). Он является сопряженным к $K_{Z_0 c}$. Следовательно, существование с.к. фундаментального решения Z обеспечивает с.к. сходимость ряда Неймана для (2.1) и, более того, с.к. решение задачи Коши в виде (1.5) равно сумме этого ряда.

Определим марковскую цепь $X = \{(x_n, t_n), n = 0, 1, \ldots\}$ с фазовым пространством D, начальной точкой $(x_0, t_0) = (x, t)$ и переходной плотностью $p(x_n, t_n \to x_{n+1}, t_{n+1}) = \dfrac{q}{t_n} Z_0(x_n - x_{n+1}, t_n - t_{n+1})$. Это означает, что t_{n+1} равномерно распределена на отрезке $(0, t_n)$ (т.е. моделируется по формуле $t_{n+1} = \alpha t_n$), а точка $x_{n+1} \in \mathbb{R}^m$ при заданной t_{n+1} нормально распределена по закону $\mathcal{N}(x_n, 2\nu(t_n - t_{n+1}))$ и моделируется в соответствии с формулой $x_{n+1} = x_n + +2(\nu(t_n - t_{n+1})\gamma_{m/2})^{1/2}\varpi$. Здесь и далее: α – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $(0, 1)$; $\gamma_{m/2}$ – независимые случайные величины, распределенные по закону гамма с параметром $m/2$; $\varpi \in \mathbb{R}^m$ – независимые изотропные векторы единичной длины.

Построим монте–карловскую оценку по столкновениям [4]:

$$\xi^*[w](x, t; \omega) = \sum_{n=0}^{N} Q_n^*[c](t_n f(x_{n,1}^*, t_n^*; \omega) + w_0(x_{n,2}^*; \omega)), \qquad (2.2)$$

где $Q_0^*[c] = 1$, $Q_{n+1}^*[c] = Q_n^*[c] \dfrac{t_n}{q} c(x_{n+1}, t_{n+1}; \omega)$; q – вероятность выживания на переходе $x_n, t_n \to x_{n+1}, t_{n+1}$; N – случайное число членов выборочной траектории марковской цепи; $x_{n,1}^*$, t_n^*, $x_{n,2}^*$ – вспомогательные случайные точки для рандомизированного вычисления интегралов, определяющих F_0; $x_{n,2}^*$ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(x_n, 2\nu t_n)$; $x_{n,1}^*$ имеет условное при фиксированном t_n^* нормальное распределение $\mathcal{N}(x_n, 2\nu(t_n - t_n^*))$; t_n^* равномерно распределена на $(0, t_n)$ (см. [5]).

Обозначим: $C_n(X;\omega) = \prod\limits_{i=1}^{n} c(x_i,t_i;\omega)$; $c_n = \mathbb{E}(C_n|X)$ ($c_0 \equiv 1$) – моментные функции случайного поля $c(x,t;\omega)$, $\widehat{C}_n = \sup\limits_{x,t}|c_n|$.

Теорема 1. *Пусть f, w_0 с.к. непрерывны, а их вторые моменты ограничены в $D\times D$; коэффициент $c(x,t;\omega)$ с.к. непрерывен, независим от f, w_0, а его моментные функции порядка $2n$ равномерно в $(\mathbb{R}^m\times[0,t])^{2n}$ удовлетворяют неравенствам*

(А): $\widehat{C}_{2n} \le (n!)^2 t^{-2n} a^2(n)$, *где $a(n) > 0$ таковы, что сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n)$.*

Тогда:

1) *для почти всех ω существует $\mathbb{E}(\xi^*[w]|\omega)$, дающее с вероятностью единица с.к. решение случайной задачи Коши* (1.1), (1.2)*;*
2) *$\xi^*[w](x,t;\omega)$ – несмещенная оценка для среднего от решения $\overline{w}(x,t) = \mathbb{E}w(x,t;\cdot)$ при любом конечном $t > 0$;*
3) *если*
   (Б): $\widehat{C}_n \le n!p_n^{-1}q^{n/2}t^{-n}a(n)$, *где $p_n = (n-1)(n-3)\ldots n_0$ ($n_0 = 1$, если n – четное, и $n_0 = 2$, если n – нечетное), то дисперсия ξ^* конечна для любого $t > 0$.*

Доказательство. Введем случайную величину $\Delta_n(X)$, равную единице при $n \le N$ и нулю иначе [4]. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\xi^*| &= \mathbb{E}\mathbb{E}(|\xi^*|\,|X)\\ &= \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^*[1]\,C_n(X;\omega)F_0(x_n,t_n;\omega)\Delta_n(X)\right|\,\Big|\,X\right)\end{aligned}$$

в силу того, что, почти наверное,

$$\mathbb{E}\left(t_n f(x_{n,1}^*,t_n^*;\omega) + w_0(x_{n,2}^*;\omega)|x_n,t_n,\omega\right) = F_0(x_n,t_n;\omega)$$

(см. [5]).

Отсюда

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|\xi^*| \;\le\; & \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^*[1]\,|C_n(X;\omega)F_0(x_n,t_n;\omega)|\,\Delta_n(X)\,\middle|\,X\right) \\
=\; & \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^*[1]\,\mathbb{E}\left(|C_n(X;\omega)|\,|X\right)\overline{|F_0(x_n,t_n)|}\Delta_n(X)\right) \\
=\; & \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(Q_n^*[1]\,\mathbb{E}\left(|C_n(X;\omega)|\,|X\right)\overline{|F_0(x_n,t_n)|}\Delta_n(X)\right),
\end{aligned}
$$

в силу условной независимости C_n и F_0 и положительности членов ряда.

Имеем

$$
\overline{|F_0(x_n,t_n)|} \le t\sup_{D}\overline{|f(x,t)|} + \sup_{\mathbb{R}^m}\overline{|w_0(x)|} \equiv \widehat{F} < \infty,
$$

в силу ограниченности вторых моментов,

$$
\mathbb{E}\left(|C_n(X;\omega)|\,|X\right) \le \widehat{C}_n \le \left(\widehat{C}_{2n}\right)^{1/2} \le n!t^{-n}a(n).
$$

Из общих свойств монте–карловских оценок [4] вытекает, что

$$
\mathbb{E}(Q_n^*[1]\Delta_n(X)) = K_{Z_0}^n[1],
$$

а из свойств фундаментального решения уравнения теплопроводности [6] следует $K_{Z_0}^n[1] = t^n/n!$.

В результате получаем

$$
\mathbb{E}|\xi^*| \le \widehat{F}\sum_{n=0}^{\infty} a(n) < \infty.
$$

Из доказанного следует, что для почти всех ω определено

$$
\mathbb{E}(\xi^*[w](x,t;\omega)|\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{Z_0c}^n F_0(x,t;\omega)
$$

и существует $\mathbb{E}\xi^*$, равное математическому ожиданию суммы ряда Неймана для (2.1).

Покажем, что этот ряд сходится и в среднеквадратическом. Действительно, имеем (для фиксированной $(x,t) \in D$)

$$||\sum_{n=0}^{\infty} K^n_{Z_0 c} F_0||_{L_2(\Omega)}(x,t) \le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{E}\left(K^n_{Z_0 c}F_0\right)^2(x,t)\right)^{1/2}$$
$$\le \sup_{x,t} ||F_0||_{L_2(\Omega)} \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{C}_{2n})^{1/2} K^n_{Z_0}[1] < \infty$$

в силу условия (A).

Доказанная с.к. сходимость ряда Неймана для (2.1) обеспечивает существование фундаментального решения Z и представление решения задачи Коши в виде (1.5). Таким образом, $\mathbb{E}(\xi^*[w]|\omega)$ для почти всех ω есть с.к. решение задачи Коши и $\xi^*[w]$ – несмещенная оценка для его среднего $\overline{w}$.

Для того, чтобы показать конечность дисперсии $\xi^*[w]$, рассмотрим второй момент этой оценки. Обозначим

$$\xi[F_0](x_n, t_n; \omega) = tf(x^*_{n,1}, t^*_n; \omega) + w_0(x^*_{n,2}; \omega)).$$

Имеем (почти наверное)

$$\mathbb{E}(\xi[F_0]|x_n, t_n, \omega) = F_0(x_n, t_n; \omega),$$
$$\mathbb{E}\xi[F_0]|x_n, t_n) = \overline{F}_0(x_n, t_n).$$

По аналогии с детерминированным случаем (см. [7]) рассмотрим рекуррентное представление для оценки:

$$\xi^*[w](x_n, t_n; \omega) = \xi[F_0](x_n, t_n; \omega) +$$
$$a\frac{t_n}{q}\, c(x_{n+1}, t_{n+1}; \omega)\xi^*[w](x_{n+1}, t_{n+1}; \omega).$$

Здесь a – случайная величина, равная единице с вероятностью q, нулю с вероятностью $1-q$ и не зависящая как от c, f, w_0, так и от X. Отсюда (для почти всех ω)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi^{*2}[w]|\omega) &= \mathbb{E}(\xi^2[F_0]|\omega) + 2\mathbb{E}(\xi[F_0]|\omega)\mathbb{E}(\xi^*[w]|\omega) + \\ &\quad K_{Z_0^2c^2/p}[\mathbb{E}(\xi^{*2}[w]|\omega)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} K^n_{Z_0^2c^2/p}\left[\mathbb{E}(\xi^2[F_0]|\omega) - F_0^2 + 2F_0\mathbb{E}(\xi^*[w]|\omega)\right].\end{aligned}$$

Заметим, что здесь, в отличие от детерминированного случая, недостаточно доказать сходимость ряда Неймана для $K_{Z_0^2c^2/p} = K_{tZ_0c^2/q}$, так как выражение в квадратных скобках коррелировано с ядром этого интегрального оператора. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi^{*2}[w] \le\ & 2\sup_{x,t}\mathbb{E}F_0^2 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} q^{-n}\widehat{C}_{2n+j}K^n_{tZ_0}K^j_{Z_0}[1] + \\ & \sup_{x,t}\mathbb{E}\left(\xi^2[F_0] - F_0^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} q^{-n}\widehat{C}_{2n}K^n_{tZ_0}[1].\end{aligned}$$

Рассмотрим интегральный оператор с ядром tZ_0. В силу свойств Z_0 $K^n_{tZ_0} = t^{2n}2^{-n}/n!$ и, таким образом,

$$K^n_{tZ_0}K^j_{Z_0}[1] = t^{2n+j}(j+1)(j+3)\cdots(j+2n-1)/(2n+j)!.$$

Отсюда следует, что при выполнении условия (Б) второй момент оценки ξ^* ограничен сверху суммой двух сходящихся рядов и дисперсия ее конечна. □

Замечание. Заметим, что в условиях теоремы не накладывается ограничений сверху на случайную функцию $c(x,t;\omega)$, одноточечное распределение которой может быть сосредоточено на всей числовой прямой.

В условиях теоремы 1 имеем

$$\mathbb{E}w = \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\infty} K^n_{Z_0c}F_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}K^n_{Z_0c}F_0 = \sum_{n=0}^{\infty} K^n_{Z_0}c_n\overline{F}_0.$$

Следствие. *Если известны все моментные функции случайного поля $c(x,t;\omega)$, то*

$$\xi^*_{\mathrm{mom}}[\overline{w}](x,t) \;=\; \sum_{n=0}^{N} Q_n^*[1] c_n(x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots;x_n,t_n)\times$$
$$(t_n\overline{f}(x^*_{n,1},t^*_n)+\overline{w}_0(x^*_{n,2}))$$

есть несмещенная оценка с конечной дисперсией для $\overline{w}(x,t)$.

3. Неслучайное поглощение

Рассмотрим ситуацию, когда случайны только входные параметры задачи f и w_0. Фундаментальное решение Z_c в этом случае – детерминированная функция, определяемая [3] (при достаточно гладкой $c(x,t)$) классическими соотношениями (1.3), (1.4), где предел понимается в обычном смысле. Отсюда следует, что при $f, w_0 \in L_2(\Omega)$ существует единственное в этом пространстве решение (1.1), (1.2) [8].

Пусть требуется определить среднее $\overline{w}$ и ковариационную функцию C_w. В силу линейной зависимости w от f и w_0, среднее есть решение соответствующей задачи со свободным членом $\overline{f}$ и начальными данными $\overline{w}_0$, а C_w – решение детерминированной краевой задачи, параметры которой определяются через решения вспомогательных задач того же вида и ковариационные функции для f и w_0.

Таким образом, $\overline{w}$ удовлетворяет усредненному соотношению (1.3), и, следовательно, применйм монте–карловский алгоритм построения оценки, основанный на моделировании марковской цепи X. В результате верна (см.[9])

Теорема 2. *Пусть:*

1) *f и w_0 имеют ограниченные вторые моменты;*
2) *f с.к. непрерывна в D, с.к. непрерывна по Гельдеру относительно x равномерно в D, w_0 с.к. непрерывна;*

3) *$c(x,t)$ ограничена, непрерывна, непрерывна по Гельдеру по x равномерно в D.*

Тогда

$$\xi^*[\overline{w}](x,t) = \sum_{n=0}^{N} Q_n^*[c](t_n \overline{f}(x_{n,1}^*, t_n^*) + \overline{w}_0(x_{n,2}^*)), \tag{3.1}$$

$$\xi^*[C_w](x,t;x',t') = \sum_{n=0}^{N} Q_n^*[c](t_n \xi^*[S](x_{n,1}^*, t_n^*; x', t') + \\ + \xi^*[v_0](x_{n,2}^*; x', t')), \quad (x_0, t_0) = (x, t), \tag{3.2}$$

есть несмещенные оценки с конечной дисперсией для среднего и ковариационной функции решения случайной задачи Коши соответственно.

Здесь $\xi^*[S]$ и $\xi^*[v_0]$ имеют вид (3.2), где вместо $\overline{f}$ и $\overline{w}_0$ стоят соответственно C_f, C_{f,w_0} и $C_{w_0,f}$, C_{w_0}.

4. Результаты расчетов

Рассматривалась задача Коши (1.1), (1.2) в трехмерном евклидовом пространстве на конечном промежутке времени: $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T]$. Начальное значение было положено равным единице. Расчеты проводились для гауссовского изотропного однородного случайного поля $c(x,t;\omega)$ с нулевым средним и ковариационной функцией $c_2(x_1,t_1;x_2,t_2) = c_2^{(x)}(x_1,x_2)c_2^{(t)}(t_1,t_2)$. Пространственная ковариационная функция была взята равной

$$\mathrm{Si}(X_{\max} r)/(X_{\max} r), \qquad r = |x_1 - x_2|,$$

где

$$\mathrm{Si}(X_{\max} r) = \int_0^{X_{\max} r} \frac{\sin\gamma}{\gamma} d\gamma$$

– интегральный синус;

$$c_2^{(t)}(t_1, t_2) = \frac{\sin(T_{\max}|t_1 - t_2|)}{T_{\max}|t_1 - t_2|}.$$

Это означает, что пространственная спектральная плотность равнялась $(4\pi\gamma^2 X_{\max})^{-1}$ при $0 \leq \gamma \leq X_{\max}$ и нулю при $\gamma > X_{\max}$. Временна́я спектральная плотность равнялась $1/2T_{\max}$ при $|\tau| < T_{\max}$ и нулю иначе.

Заметим, что из независимости начальной функции от пространственной координаты и однородности c следует, что решение также не зависит от x.

Для компьютерного моделирования случайного поля использовалась рандомизированная спектральная модель с равномерным разбиением диапазона частот: 5 – по каждой из угловых координат, 10 – по радиальной и по временно́й составляющим.

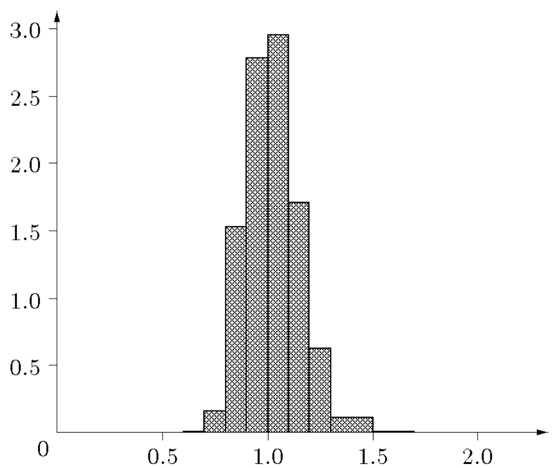

Рис. 1. Плотность распределения $w(0, 1; \cdot)$ ($X_{\max} = 10$, $T_{\max} = 10$)

Для вычисления выборочных значений $w(x, t; \omega)$ использовалась оценка (2.2). Для каждого значения $c(\cdot, \cdot; \omega)$ разыгрывалось 10 000 траекторий марковской цепи, что обеспечило относительную статистическую ошибку порядка 1%. Для оценивания одноточечной плотности распределения $w(x,t;\cdot)$ ((x,t) фиксирована) использовалась гистограммная оценка по 1000 выборочным значениям решения. Рассматривались три варианта диапазонов частот $X_{\max}$ и $T_{\max}$.

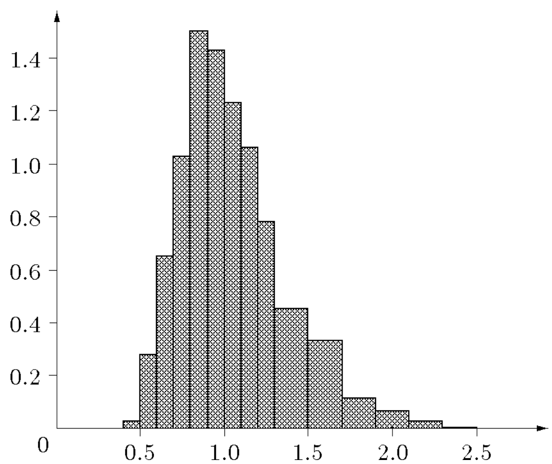

Рис. 2. Плотность распределения $w(0,1;\cdot)$ ($X_{\max}=1$, $T_{\max}=10$)

Следует заметить, что в предельном случае, когда $X_{\max}$, $T_{\max}$ стремятся к бесконечности, случайные величины $c(x,t;\cdot)$ одинаково распределены $\mathcal{N}(0,1)$, некоррелированы и, следовательно, в данном случае независимы. Отсюда вытекает, что интеграл в формуле Фейнмана–Каца $\int_0^t c(y(s),t-s)ds$ для каждой фиксированной траектории диффузионного процесса y равен $t\mathbb{E}c=0$. Таким образом, $w=\mathbb{E}w_0=1$.

Наоборот, если $X_{\max}$, $T_{\max}$ стремятся к нулю, то это означает, что $c(x,t;\cdot)$ есть не зависящая от координат случайная величина и, следовательно, $\int_0^t c(y(s),t-s)ds = tc$. Отсюда $w=\exp(tc)$, т.е. является логнормально распределенной случайной величиной, не зависящей от пространственной координаты.

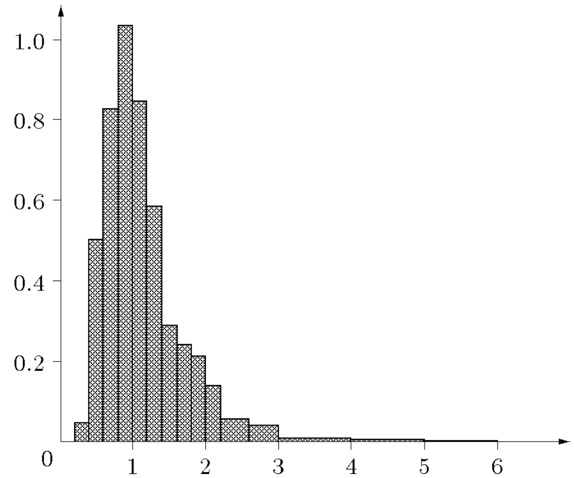

Рис. 3. Плотность распределения $w(0,1;\cdot)$ ($X_{\max}=1$, $T_{\max}=1$)

Литература

[1] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969.

[2] Артемьев С.С. Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Изд. ВЦ СО РАН, 1993.

[3] Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17, вып. 3. – С. 3–147.

[4] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982.

[5] Симонов Н.А. Стохастические итерационные методы решения уравнений параболического типа // Сиб. мат. журнал. – 1997. – Т. 38, № 5. – С. 1146–1162.

[6] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

[7] Михайлов Г.А. Оптимизация весовых методов Монте–Карло. – М.: Наука, 1987.

[8] Bécus G.A. Random generalized solutions to the heat equation // J. Math. Anal. and Appl. – 1977. – Vol. 90. – P. 93–102.

[9] Simonov N.A. Stochastic computational methods for parabolic equations with random data // 15th IMACS World Congress, Berlin, August 1997. Proceedings. A.Sydow, ed. – 1997. – Vol. 1. – P. 449–452.