

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ РЕШЕНИЯ

Н. А. Симонов *

Аннотация. В работе рассматривается первая краевая задача для параболического уравнения в многомерном пространстве. На основе представления решения в виде поверхностного теплового потенциала строится алгоритм случайного блуждания для случая, когда граничная функция представляет собой интеграл от решения внутри области. Доказывается несмещённость и конечность дисперсии полученной оценки.

1. Краевая задача и интегральное уравнение для плотности потенциала

Рассмотрим уравнение параболического типа во внешности ограниченной односвязной области G_0 с односвязной границей Γ

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^m u_i(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(x, t)w + f(x, t),$$

$$(x, t) \in \mathcal{X} = G \times (0, T), \quad G = \mathbb{R}^m \setminus \bar{G}_0, \quad m \geq 2,$$

или

$$w_t = \nu \Delta w - (u \cdot \nabla)w + cw + f, \quad (1)$$

и начально-краевую задачу для него

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= w_0(x), \quad x \in G, \\ w(y, t) \Big|_{y \in \Gamma} &\equiv \lim_{x \rightarrow y, x \in G} w(x, t) = g(y, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Монте-карловские алгоритмы решения подобных задач известны достаточно давно, в частности, в работе [1] описаны алгоритмы случайного блуждания по границе для уравнения теплопроводности, основанные на представлении w в виде суммы тепловых потенциалов. При этом, естественно, предполагалось, что функция g точно задана.

Существуют, однако, такие задачи, в которых граничное значение представляет собой функционал от решения внутри области. Например, в методе случайных вихрей [2] для уравнений Навье-Стокса физические краевые условия, лежащие в основании механизма зарождения вихрей

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, Проект 94-01-00209, и Международного Научного Фонда (International Science Foundation), Грант NPC000.

на поверхности, позволяют утверждать, что граничные значения w пропорциональны касательной компоненте скорости, которая, в свою очередь, в силу закона Био-Савара, есть сумма интеграла от завихренности по области и компоненты, определяемой потенциальным потоком. Ядро же вышеупомянутого интеграла типа потенциала есть производная (по направлению нормали в двумерном случае) от фундаментального решения уравнения Лапласа (либо матрица, составленная из таких функций, в трёхмерном случае). Все эти рассуждения привели к необходимости исследовать возможность построения монте-карловского алгоритма для решения первой краевой задачи с граничной функцией следующего вида:

$$g(y, t) = \int_G dx \frac{f(y, x)}{|y - x|^{m-1}} w(x, t) + g_0(y, t) \equiv K_f w + g_0, \quad (3)$$

где $f(y, x)$ – равномерно ограниченная на $\Gamma \times G$ функция.

В данной работе будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$w_t = \nu \Delta w, \quad \nu = \text{const} > 0,$$

исключая тем самым влияние конвективного и других членов, входящих в исходное уравнение. Положим кроме того равной нулю начальную функцию w_0 и будем искать решение в виде теплового потенциала двойного слоя

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \int_0^t dt' \int_{\Gamma} d\sigma(y') \frac{\cos \varphi_{y'x} |y' - x|}{\nu(t - t')} Z(x - y', t - t') \mu(y', t') \\ &\equiv W \mu(x, t), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$Z(x, t) = (4\pi\nu t)^{-m/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\nu t}\right), \quad t > 0$$

– фундаментальное решение уравнения теплопроводности, $\varphi_{y'x} = \angle(n(y'), x - y')$, $n(y')$ – нормаль к поверхности Γ в точке y' , направленная в G_0 .

Заметим, что алгоритм в рамках рассматриваемого далее подхода естественным образом распространяется и на параболические уравнения более общего вида (1), методы Монте-Карло для которых также разработаны и будут в ближайшее время опубликованы (см. [3 – 5]).

Соотношение на разрыв потенциала W и краевое условие (2) позволяют выписать интегральное уравнение, которому удовлетворяет неизвестная плотность μ :

$$\begin{aligned} \mu(x, t) &= \int_0^t dt' \int_{\Gamma} d\sigma(y') k(y, t; y', t') \mu(y', t') - g(y, t) \\ &\equiv K \mu - g, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$k(y, t; y', t') = \frac{\cos \varphi_{y'y} |y - y'|}{(4\nu(t - t'))^{m/2+1}} \cdot \frac{4}{\pi^{m/2}} \cdot \exp\left(-\frac{|y - y'|^2}{4\nu(t - t')}\right) \quad (6)$$

– ядро интегрального оператора K .

Подставив в (3) выражение для w в виде потенциала двойного слоя (4), видим, что свободный член уравнения (5) в действительности также зависит от искомой функции μ :

$$g = K_f W \mu + g_0.$$

Покажем, что интегральный оператор $K_f W$ является ограниченным оператором в пространстве $L_\infty(\mathcal{Y})$, где $\mathcal{Y} = \Gamma \times [0, T]$.

Действительно

$$\begin{aligned}
 |K_f W \mu(y, t)| &= \left| \int_G dx \frac{f(y, x)}{|y - x|^{m-1}} \int_0^t dt' \int_\Gamma d\sigma(y') k(y, t; y', t') \mu(y', t') \right| \\
 &\leq \sup |f| \cdot \|\mu\|_{L_\infty} \int_G dx \int_0^t dt' \int_\Gamma d\sigma(y') \frac{4}{(4\nu)^\beta \pi^{m/2}} \cdot s^{\frac{m}{2} - \beta + 1} \exp(-s) \\
 &\quad \times |x - y'|^{-(m+1-2\beta)} |x - y|^{-(m-1)} |t - t'|^{-\beta},
 \end{aligned} \tag{7}$$

где обозначено

$$s = \frac{|x - y'|^2}{4\nu(t - t')} > 0,$$

а $\beta > 0$ – некоторая константа. Обозначим $\frac{m}{2} - \beta + 1 = a$. Пусть $a > 0$ (то есть $\beta < 1 + \frac{m}{2}$). Тогда функция $s^a \exp(-s)$ достигает своего максимума, равного $(a/e)^a$ при $s = a$.

Таким образом, осталось оценить тройной интеграл

$$I(y, t) = \int_G dx \int_0^t dt' \int_\Gamma d\sigma(y') |x - y'|^{-(m+1-2\beta)} |x - y|^{-(m-1)} |t - t'|^{-\beta}.$$

При $\beta < 1$ имеем

$$I(y, t) = t^{1-\beta} \cdot B(1, 1 - \beta) \int_\Gamma d\sigma(y') \int_G dx |x - y'|^{-(m+1-2\beta)} |x - y|^{-(m-1)}$$

в силу того, что $x \neq y$, $x \neq y'$ и, следовательно, повторный интеграл существует при любом порядке интегрирования. Здесь $B(a, b)$ – бета-функция.

Для дальнейшей оценки нам потребуется обобщение Леммы 2 из [6, стр.26] на случай бесконечной области, а именно

Лемма 1. Для любых точек $y, y' \in \Gamma$, $y \neq y'$ и постоянных $0 < a < m$, $0 < b < m$, таких, что $a + b > m$, верно следующее неравенство

$$\int_G dx \frac{1}{|x - y|^a} \frac{1}{|x - y'|^b} \leq C_m |y - y'|^{m-a-b}.$$

Для доказательства достаточно разбить область интегрирования на четыре части: $G_1 = \{x : x \in G, |x - y| < |y - y'|/2\}$, $G_2 = \{x : x \in G, |x - y'| < |y - y'|/2\}$, $G_3 = \{x : x \in G \setminus (G_1 \cup G_2), |x - (y + y')/2| < |y - y'|/2\}$, дополнение этих трёх областей до G , и оценить каждый из интегралов в отдельности.

Применив результат Леммы к интегралу $I(x, t)$, получим при $\beta > 1/2$ следующую оценку

$$|K_f W \mu(y, t)| \leq C_w t^{1-\beta} B(1, 1 - \beta) \|\mu\|_{L_\infty}. \tag{8}$$

Итак, оператор $K_f W$ – ограниченный оператор на $L_\infty(\mathcal{Y})$, что позволяет переписать (5) в следующем виде

$$\mu = (K - K_f W) \mu - g_0. \tag{9}$$

Теорема 1. Ряд Неймана для интегрального уравнения (9) сходится.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что интегральный оператор K на ляпуновских поверхностях является слабо полярным, и, следовательно, для него справедлива оценка (см. [1])

$$|K\mu(y, t)| \leq C_k t^{\lambda/2} B(1, \lambda/2) \|\mu\|_{L_\infty}, \quad (10)$$

где λ – показатель Ляпунова для Γ . В полной аналогии с доказательством Теоремы 5.2, стр.101 [1] последовательное применение оценок (8), (10) позволяет оценить сверху итерации интегрального оператора $K - K_f W$ членами сходящегося ряда, что и доказывает сходимость ряда Неймана для (9). \square

Следствие 1. Ряд Неймана для интегрального оператора $(K - K_f W)_1$ в принятых в монтекарловской литературе обозначениях, то есть для оператора, ядро которого есть модуль ядра исходного, также сходится.

Утверждение Следствия вытекает из соотношений (8), (10) в полной аналогии с доказательством Теоремы.

2. Стохастический алгоритм построения оценки

Установленный факт сходимости ряда Неймана для оператора $(K - K_f W)_1$ позволяет построить несмещённую случайную оценку для w .

Рассмотрим, как обычно, представление (4) решения исходной задачи как интегральный функционал от решения интегрального уравнения:

$$w(x, t) = (h_{x,t}, \mu).$$

Ядро $k(y, t; y', t')$ интегрального оператора K , как известно (см. [1]), согласовано с переходной плотностью $p(y, t \rightarrow y', t')$ D-процесса (или B-process в терминологии [7], то есть случайный процесс с обратным ходом по времени). Таким образом, естественным здесь будет применение сопряжённой оценки. Следовательно, плотность распределения начальной точки марковской цепи должна быть согласована с весовой функцией $h_{x,t}$. Как отмечалось в [1], эта функция допускает естественную вероятностную интерпретацию. Действительно

$$\begin{aligned} h_{x,t}(y', t') &= \left[\frac{2 \cos \varphi_{yx}}{\sigma_m |x - y'|^{m-1}} \right] \cdot \left[\frac{4|x - y'|^m}{\Gamma(\frac{m}{2})(4\nu(t - t'))^{m/2+1}} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y'|^2}{4\nu(t - t')}\right) \right], \end{aligned}$$

где первая часть соответствует равномерному распределению точки y' по углу видимости из x , а вторая – условному при фиксированном y' распределению точки t' . Здесь

$$\sigma_m = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2})}$$

– площадь поверхности единичной сферы в \mathbb{R}^m , а $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Таким образом, естественным будет выбор следующей факторизованной начальной плотности

$$\begin{aligned} p_0(y_0, t_0) &= \left[\frac{2|\cos \varphi_{y_0 x}|}{q_0(x)\sigma_m |x - y_0|^{m-1}} \right] \\ &\times \left[\frac{4\nu|x - y_0|^m}{\gamma_0 \Gamma(\frac{m}{2})(4\nu(t - t_0))^{m/2+1}} \cdot \exp\left(-\frac{|x - y_0|^2}{4\nu(t - t_0)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Опишем алгоритм выбора начальной точки марковской цепи в соответствии с плотностью p_0 . Зафиксируем точку x и обозначим

$$\Omega(x) = \int_{\Gamma} d\sigma(y) \frac{|\cos \varphi_{yx}|}{2k(x, y)|x - y|^{m-1}}$$

угол видимости поверхности Γ из точки x . Здесь $2k(x, y)$ – число пересечений с Γ прямой, проходящей через точки x и y , чётное в данном случае ($k = 1$ для выпуклых поверхностей). Это означает, что мы исключаем из рассмотрения событие нулевой вероятности, когда прямая, проходящая через x , касается поверхности Γ . Будем выбирать случайное направление этой прямой равномерно по углу до тех пор, пока она не пересечет Γ . Событие это происходит при каждом независимом выборе направления с вероятностью $q_0(x)$, которая равна единице в случае $\Omega(x) \geq \sigma_m/2$ и

$$q_0(x) = \frac{2\Omega(x)}{\sigma_m},$$

если это отношение меньше единицы. В алгоритме, применявшемся в [1] при построении случайного блуждания по границе для решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, в качестве начальной точки выбиралось равновероятно одно из полученных пересечений. Здесь же при построении оценки решения используются все точки $y_0^{(j)}$, $j = 1, \dots, 2k$, каждая из которых рассматривается как начальная для своей марковской цепи.

Далее при фиксированной $y_0^{(j)}$ начальное значение времени определяется по обычной формуле

$$t_0^{(j)} = t - \frac{|x - y_0^{(j)}|^2}{4\nu s^{(j)}}, \quad (2)$$

где $s^{(j)}$ – выборочное значение $\gamma(\frac{m}{2})$ -распределенной на луче

$$\left[\frac{|x - y_0^{(j)}|^2}{4\nu t}, +\infty \right)$$

случайной величины. То есть, используя известные моделирующие формулы (см., например, [8]), мы выбираем случайное значение $s^{(j)}$ до тех пор, пока оно не окажется в заданном интервале. При каждом испытании вероятность успеха равна

$$\gamma_0^{(j)} = \mathbb{P} \left(\gamma\left(\frac{m}{2}\right) > \frac{|x - y_0^{(j)}|^2}{4\nu t} \right).$$

Ясно, что либо нам необходимо точно знать эту величину, либо, как обычно, в случае неуспеха обрывать моделирование этой траектории и делать нулевой вклад в оценку. (В этом случае $\gamma_0^{(j)}$ равно единице). Для $m = 2$ эта вероятность равна

$\mathbb{P}(\gamma(1) > s_0) = \exp(-s_0)$, а для других значений размерности наиболее рациональным будет затабулировать эту функцию.

Таким образом, мы можем записать

$$W[\mu](x, t) = \mathbb{E}\xi[W](x, t),$$

где

$$\xi[W](x, t) = \sum_{j=1}^{2k(x, y_0)} \text{sign}(\cos \varphi_{y_0^{(j)} x}) \frac{q_0(x) \gamma_0^{(j)}}{\nu} \cdot \xi[\mu](y_0^{(j)}, t_0^{(j)}). \quad (3)$$

Здесь мы, применяя принцип двойной рандомизации, вместо точных значений плотности μ в соответствующих точках подставили в (3) их несмещённые оценки, которые, как уже было отмечено, строятся с использованием сопряжённых в монте-карловской терминологии блужданий.

Рассмотрим вначале стандартную краевую задачу для уравнения теплопроводности и алгоритм случайного блуждания по границе для её решения, построенный в [1]. По аналогии с введением

ветвления в выбор начальной точки естественным образом преобразуется в ветвящийся и В-process. (Идея использовать ветвящуюся марковскую цепь при построении оценки для решения уравнения теплопроводности в невыпуклых областях была высказана в [9]). Это означает, что если определена точка марковской цепи $(y_i, t_i) \in \Gamma$, то для выбора следующей разыгрывается изотропное случайное направление прямой, проходящей через (y_i, t_i) . Оно пересекает Γ в $2k(y_i, y_{i+1}) - 1$ точках $y_{i+1}^{(j)}$, каждая из которых участвует в дальнейшем построении. Далее как обычно моделируется выборочное значение $\gamma(\frac{m}{2})$ -распределенной случайной величины s и вычисляются

$$t_{i+1}^{(j)} = t_i - \frac{|y_i - y_{i+1}^{(j)}|^2}{4\nu s}.$$

При этом, если для какого-то j мы получили значение $t_{i+1}^{(j)} < 0$, то эта ветвь марковской цепи обрывается. Кроме этого естественного обрыва мы также вводим и искусственный с некоторой вероятностью $1 - q$.

Плотность перехода для такой модификации В(D)-процесса отличается от приведённой в [1] и равна

$$p(y_i, t_i \rightarrow y_{i+1}, t_{i+1}) = \left[\frac{2|\cos \varphi_{y_i y_{i+1}}|}{\sigma_m |y_i - y_{i+1}|^{m-1}} \right] \times \left[\frac{4\nu |y_i - y_{i+1}|^m}{\Gamma(\frac{m}{2})(4\nu(t_i - t_{i+1}))^{m/2+1}} \cdot \exp\left(-\frac{|y_i - y_{i+1}|^2}{4\nu(t_i - t_{i+1})}\right) \right]. \quad (4)$$

Оценка $\xi[\mu]$ для плотности вычисляется в процессе моделирования марковской цепи по рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} & \xi[\mu](y_i, t_i) \\ &= \sum_{j=1}^{2k(y_i, y_{i+1})-1} \text{sign}(\cos \varphi_{y_{i+1}^{(j)} y_i}) \frac{1}{\nu q} \cdot \xi[\mu](y_{i+1}^{(j)}, t_{i+1}^{(j)}) - g(y_i, t_i), \end{aligned} \quad (5)$$

где для простоты опущены множители $\chi_{[0, +\infty)}(t_{i+1}^j)$ и $\chi_{[0, q]}(\alpha)$, определяющие условия обрыва. Здесь через χ обозначена индикаторная функция множества.

Рассмотрим теперь краевую задачу (3), решение которой, как видим, сводится к оцениванию интегрального функционала от решения (9). Рандомизация этого интегрального уравнения приводит к следующему рекуррентному соотношению, которому должна удовлетворять плотность потенциала μ :

$$\begin{aligned} \xi[\mu](y_i, t_i) &= \sum_{j=1}^{2k(y_i, y_{i+1})-1} \text{sign}(\cos \varphi_{y_{i+1}^{(j)} y_i}) \frac{1}{\nu q} \cdot \xi[\mu](y_{i+1}^{(j)}, t_{i+1}^{(j)}) \\ &\quad - \sum_{j=-1}^{-2k(x_{i+1}, y_{i+1})} Q_i^{(j)} \frac{1}{q'} \cdot \xi[\mu](y_{i+1}^{(j)}, t_{i+1}^{(j)}) - g_0(y_i, t_i). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь также для простоты опущены множители $\chi_{[0, +\infty)}(t_{i+1}^j)$ и $\chi_{[0, q]}(\alpha)$ в первой сумме и $\chi_{[0, +\infty)}(t_{i+1}^j)$ и $\chi_{[0, q']}(q')$ во второй.

Алгоритм построения точек $(y_{i+1}^{(j)}, t_{i+1}^{(j)})$ при $j > 0$ в соответствии с переходной плотностью (4) уже описан выше. В результате, первая сумма в (6) соответствует рандомизированному вычислению $K\mu(y_i, t_i)$. Остаётся определить переходную плотность, в соответствии с которой выбираются точки следующего поколения при $j < 0$, и веса $Q_i^{(j)}$, входящие во вторую сумму в (6), которая по сути есть несмещённая оценка для $K_f W \mu(y_i, t_i)$.

Опишем алгоритм моделирования $(y_{i+1}^{(j)}, t_{i+1}^{(j)})$ при $j < 0$. В первую очередь необходимо выбрать вспомогательную точку x_{i+1} в области G . В процессе доказательства ограниченности оператора $K_f W$ выяснено, что его ядро имеет особенность порядка $O(|x - y_i|^{-(m-1)})$ при $x \rightarrow y_i$ и, в силу ограниченности поверхности Γ , стремится к нулю при $d = \text{dist}(x, \Gamma)$ стремящемся к бесконечности

со скоростью $O(d^{-(2m-2\beta)})$. Отсюда вытекает следующий алгоритм моделирования точки x_{i+1} . С положительной вероятностью $p^{(x)}$ она выбирается в шаре некоторого радиуса d_0 с центром в точке y_i (обозначим его G_1) с плотностью (по объёмной мере)

$$\frac{1}{|x_{i+1} - y_i|^{m-1}} \cdot \frac{1}{\sigma_m d_0}, \quad (7)$$

а с вероятностью $1 - p^{(x)}$ – во внешности этого шара (обозначим её G_2) с плотностью

$$\frac{1}{|x_{i+1} - y_i|^{2m-2\beta}} \cdot \frac{(m-2\beta) \cdot d_0^{m-2\beta}}{\sigma_m}. \quad (8)$$

Обозначим

$$x_{i+1} = y_i + r_i \cdot \omega_i.$$

Тогда моделирующие формулы для $r_i = |x_{i+1} - y_i|$ и ω_i таковы.

Пусть определено, что $x_{i+1} \in G_1$. Тогда направление ω_i выбирается изотропно, а

$$r_i = \alpha \cdot d_0,$$

где α , как обычно, равномерно распределённое на отрезке $[0, 1]$ число. Заметим, что смоделированная таким образом точка с какой-то вероятностью попадёт в G_0 . В этом случае данная ветвь марковской цепи обрывается.

Если $x_{i+1} \in G_2$, то, смоделировав по-прежнему направление ω_i изотропно, для выбора r_i на луче $(d_0, +\infty)$ применяем следующую формулу:

$$r_i = (\alpha)^{-\frac{1}{m-2\beta}} \cdot d_0.$$

Считаем, что d_0 выбрано достаточно большим для того, чтобы можно было считать, что $G_0 \subset G_1$, и, следовательно, в данном случае точка x_{i+1} всегда находится в области G .

Теперь, после того, как выбрана точка x_{i+1} , фактически необходимо оценить значение потенциала двойного слоя $W\mu(x_{i+1}, t_i)$. При этом метод построения оценки будет, что естественно, зависеть от того, где находится точка x_{i+1} .

Итак, пусть $x_{i+1} \in G_1$. В этом случае применим оценку (3), в которой $q_0(x) = \gamma_0^{(j)} = 1$. Это означает, что изотропное случайное направление выбирается только один раз и, если прямая с этим направлением, проходящая через точку x_{i+1} , не пересекает Γ , то эта ветвь траектории марковской цепи обрывается, и полагаем, что $\xi[W](x_{i+1}, t_i) = 0$. Аналогично, если выбранное случайное значение t_{i+1} окажется меньше нуля, то также происходит обрыв. (Заметим, что в принципе ничто не мешает использовать (3) в неизменённом виде). Если же не произошло ни одно из вышеперечисленных событий, то, как и в (3), верхний предел во второй сумме в (6) равен $-2k(x_{i+1}, y_{i+1})$, то есть числу (с минусом) пересечений прямой с Γ .

В результате проведённых построений получаем следующие факторизованную переходную плотность:

$$\begin{aligned} p_1(y_i, t_i \rightarrow y_{i+1}, t_{i+1}) &= p_1(y_{i+1}, t_{i+1} | x_{i+1}) \cdot p(x_{i+1} | y_i) \\ &= p^{(x)} \frac{1}{|x_{i+1} - y_i|^{m-1}} \cdot \frac{1}{\sigma_m d_0} \left[\frac{2 |\cos \varphi_{y_{i+1} x_{i+1}}|}{\sigma_m |x_{i+1} - y_{i+1}|^{m-1}} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{4\nu |x_{i+1} - y_{i+1}|^m}{\Gamma(\frac{m}{2})(4\nu(t_i - t_{i+1}))^{m/2+1}} \cdot \exp\left(-\frac{|x_{i+1} - y_{i+1}|^2}{4\nu(t_i - t_{i+1})}\right) \right], \end{aligned}$$

и весовой множитель

$$Q_i^{(j)} = \frac{\sigma_m d_0}{p^{(x)\nu}} f(y_i, x_{i+1}) \text{sign}(\cos \varphi_{y_{i+1}x_{i+1}}^{(j)}).$$

Пусть теперь $x_{i+1} \in G_2$. Использование плотности (8) позволило учесть асимптотическое поведение ядра интегрального оператора $K_f W$ при $x \rightarrow \infty$. Обратимся теперь вновь к представлению (7). Видим, что при выборе плотности распределения t_{i+1} также необходимо учесть особенность ядра. Положим

$$t_{i+1} = t_i(1 - \alpha^{\frac{1}{1-\beta}}).$$

Это означает, что t_{i+1} выбирается на интервале $(0, t_i)$ с плотностью

$$\frac{1 - \beta}{t_i^{1-\beta}} (t_i - t_{i+1})^{-\beta}.$$

Что касается выбора y_{i+1} , то процедура, применявшаяся в случае $x_{i+1} \in G_1$, здесь не подходит, ибо вес, возникающий в результате рандомизированного вычисления значения интегрального оператора $K_f W$, умножается на величину порядка $|x_{i+1} - y_{i+1}|^{m-1}$, которая в данном случае может быть как угодно велика. Здесь подойдёт любая отделённая от нуля плотность распределения на поверхности Γ . Обозначим её $p_{G_2}(y)$. Вторая сумма в (6) в данном случае состоит всего из одного слагаемого, переходная плотность есть

$$p_2(y_i, t_i \rightarrow y_{i+1}, t_{i+1}) = \frac{1 - p^{(x)}}{|x_{i+1} - y_i|^{2m-2\beta}} \cdot \frac{(m - 2\beta) \cdot d_0^{m-2\beta}}{\sigma_m} \\ \times p_{G_2}(y_{i+1}) \frac{1 - \beta}{t_i^{1-\beta}} (t_i - t_{i+1})^{-\beta},$$

а весовой множитель

$$Q_i^{(j)} = \frac{1}{1 - p^{(x)}} f(y_i, x_{i+1}) \left(\frac{|y_i - x_{i+1}|}{|y_{i+1} - x_{i+1}|} \right)^{m+1-2\beta} \\ \times \frac{8d_0^{m-2\beta} t_i^{1-\beta}}{(1 - \beta)(m - 2\beta)\Gamma(\frac{m}{2})(4\nu)^\beta} \cdot \frac{\cos \varphi_{y_{i+1}x_{i+1}}}{p_{G_2}(y)} \cdot s^{\frac{m}{2} - \beta + 1} \exp(-s),$$

где $s = |y_{i+1} - x_{i+1}|/4\nu(t_i - t_{i+1})$.

Заметим, что при рандомизации вычисления $K_f W \mu(y_i, t_i)$ также вводится искусственный обрыв с некоторой вероятностью $1 - q'$.

Теорема 2. Оценка (3), (5) решения классической первой краевой задачи для уравнения теплопроводности и оценка (3), (6) для задачи с краевым условием, зависящим от решения внутри области, есть несмещённые оценки с конечной дисперсией.

Доказательство. Несмещённость построенных оценок вытекает из сходимости ряда Неймана для операторов K_1 и $(K - K_f W)_1$ (см.[10]), что позволяет применить к соотношениям (5), (6) оператор \mathbb{E} почленно и прийти к исходному интегральному уравнению, которому будет удовлетворять конечное $\mathbb{E}\xi[\mu]$.

Реализуемость оценки, то есть конечность с вероятностью единица числа точек ветвящейся марковской цепи, достигается выбором вероятностей обрыва. Заведомо конечным среднее число точек будет, например, при $q, q' < 4\bar{k} - 1$, где \bar{k} – максимально возможное для данной поверхности Γ число пересечений с прямой.

Осталось показать конечность дисперсии построенной оценки $\xi[w]$ или, что равносильно, конечность второго момента $s = \mathbb{E}(\xi[\mu])^2$.

Выпишем вначале уравнение, которому удовлетворяет s в случае классической краевой задачи. Здесь следует заметить, что закон, по которому происходит ветвление рассматриваемой в данной

работе цепи, существенно отличается от тех, что применяются при использовании метода расщепления и построении оценки решения нелинейных интегральных уравнений, в первую очередь тем, что точки следующего поколения не являются независимыми. По построению они находятся на одной прямой. Это обстоятельство, как будет показано, усложняет интегральное уравнение для \mathbf{s} , интегральный оператор которого, однако, и, как следствие, спектральные свойства сохраняются.

Итак, для известной граничной функции \mathbf{g} оценка для плотности μ определяется соотношением (5). Отсюда

$$\mathbf{s} = \mathbf{K}_p \mathbf{s} - \mathbf{K}_p \mu^2 + \mathbf{K}_{p,\phi} \mu - \mathbf{g}(2\mu + \mathbf{g}), \quad (9)$$

где, как обычно, \mathbf{K}_p – интегральный оператор с ядром k^2/p ,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{p,\phi} \mu(\mathbf{y}_1, t_1) = & \frac{1}{\nu^2 q} \int_{\Omega_+} d\phi \int_0^{+\infty} da a^{\frac{m}{2} - 1} \exp(-a) \\ & \times \left(\sum_{j=1}^{2k(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) - 1} \mu(\mathbf{y}_2^{(j)}, t_2^{(j)}) \text{sign}(\cos \varphi_{\mathbf{y}_2^{(j)} \mathbf{y}_1}) \chi\left(\frac{(r^{(j)})^2}{4\nu t_1}, +\infty\right) (a) \right)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{y}_2^{(j)} = \mathbf{y}_1 + r^{(j)} \boldsymbol{\omega}$, $t_2^{(j)} = t_1 - \frac{(r^{(j)})^2}{4\nu a}$, Ω_+ – какое-либо полупространство, ϕ – телесный угол, определяющий направление $\boldsymbol{\omega}$.

Совершенно аналогично выписывается интегральное уравнение для среднего квадрата и для задачи с граничной функцией (3):

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = & \mathbf{K}_p \mathbf{s} + p^{(x)} \mathbf{K}_f \mathbf{W}_{p2} \mathbf{s} + (1 - p^{(x)}) \mathbf{K}_f \mathbf{W}_{p3} \mathbf{s} \\ & - \mathbf{K}_p \mu^2 - p^{(x)} \mathbf{K}_f \mathbf{W}_{p2} \mu^2 + \mathbf{K}_{p,\phi} \mu \\ & + p^{(x)} \mathbf{K}_f \mathbf{W}_{p2,\phi} \mu - \mathbf{g}_0(2\mu + \mathbf{g}_0). \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь для доказательства конечности \mathbf{s} достаточно заметить, что $k^2/p \leq \text{const}|k|$ и, аналогично, $k_f^2/p_2 \leq \text{const}|k_f|$, $k_f^2/p_3 \leq \text{const}|k_f|$, где k_f – ядро оператора $\mathbf{K}_f \mathbf{W}$. Таким образом, для интегральных операторов \mathbf{K}_p , $\mathbf{K}_f \mathbf{W}_{p2}$ и $\mathbf{K}_f \mathbf{W}_{p3}$ верны оценки (10), (8). Следовательно (см. [1, 7]), ряды Неймана для уравнений (9), (11) сходятся. \square

Список литературы

- [1] О. А. Курбанмурадов, К. К. Сабельфельд, Н. А. Симонов – *Алгоритмы случайного блуждания по границе*. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989.
- [2] A. J. Chorin – Numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 1973, **57**, pp.785-796.
- [3] N. A. Simonov – Boundary value problem and stochastic algorithm for two-dimensional Navier-Stokes equations, *Monte Carlo Methods and Applications*, 1995, **1**, No.1, pp.59-70.
- [4] Н. А. Симонов – *Стохастические алгоритмы решения первой краевой задачи и задачи Коши для уравнения конвективной диффузии*. – Препринт 1053, ВЦ СО РАН, 1995.
- [5] Н. А. Симонов – Стохастические итерационные методы решения уравнений параболического типа. – В печати.
- [6] А. Фридман – *Уравнения с частными производными параболического типа*. Москва: Мир, 1968.

- [7] К. К. Sabelfeld, N. A. Simonov *Random walks on boundary for solving PDEs*. VSP, Utrecht, The Netherlands, 1994.
- [8] С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов *Статистическое моделирование*. М.: Наука, 1982.
- [9] Yu. N. Kopylov Algorithms of statistical modelling for calculation of perturbation of solution of boundary value problems with variation of the domain boundary, *Siberian Journal of Computer Mathematics*, 1993, No.4.
- [10] Г. А. Михайлов *Рекуррентные формулы и принцип Беллмана в методе Монте-Карло*. Препринт 1001, ВЦ СО РАН, 1993.